BIBLIOTECA VITT. EMANUELE
12
21 E
101

14-22.A.5a

XXIX a 15

ELEMENTA
GEOMETRIÆ
PLANÆ AC SOLIDÆ,

QUIBUS ACCEDUNT SELECTA

EX ARCHIMEDE
THEOREMATA.

AUCTORE

ANDREA TACQUET

SOCIETATIS JESU

Sacerdote, & Matheſeos Profeſſore.

IN HAC NOVA EDITIONE INSERTA EST *Trigonometria plana ejuſdem auctoris, & Sphærica aliundè deſumpta.*

PATAVII, M. DC. XCIV.

Ex Typographia Seminarii.

Superiorum permiſſu.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

AMICE LECTOR.

CUm multis jam annis Elementorum Geometricorum, minoris formæ, in hiſce locis penuria laboratum eſſet, viſum denique eſt ad uſum ſtudioſæ juventutis, cujus gratia hunc laborem qualemcumque ſuſcepi, novam editionem adornare, in qua quid præſtitum ſit, paucis accipe.

1 In primis Geometriæ planæ ac ſolidæ elementa conjunxi, ne (ut fit plerumque) ſemper in planis tyrones hæreant; ſed ab his tranſeant ad ſolida; quorum ſummè neceſſaria cognitio eſt.

2 Propoſitionum hypotheſibus & aſſertionibus litteras, parentheſi incluſas, quibus ad figuram referri poſſint, appoſui: quod eo conſilio feci, ne ante demonſtrationem, iterùm explicanda aſſertio, adeòque idem bis repetendum eſſet: & tamen litteris à reliquo ſenſu parentheſi ſeparatis, ſua aſſertioni univerſalitas conſtaret. Aſſertionem igitur conveniet legere primùm litteris prætermiſſis; tum ſi non intelliges, te litteræ ad figuram ducent.

3 Propoſitiones aliquas prætermiſi, quarum ferè vel nullus uſus eſt, aut certè non alius, quàm ut per eas demonſtrentur aliæ, quas ſine illis faciliori via poteram

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

demonſtrare. Eoſdem tamen propoſitionum retineo numeros, quos Euclides, ordinemque ſervo, quem bis mille annorum uſus probavit.

4 *Demonſtrationes vel novas affero, vel antiquas breviores plerumque, ac faciliores conor efficere. Et prolixitas quidem raró prodeſt. Ea ſiquidem tardiores, & hebetiores non juvat, ſubtilibus, autem & ingenioſis moleſta eſt.*

5 *Quamvis autem brevis eſſe ſtuduero, exiſtimavi tamen, me à propoſito non recedere, ſi ea adderem, quæ Geometriam diſcere volentibus futura uſui videbantur. Itaque Corollaria, & ſcholia adjunxi non pauca, quæ uſu longo didici in elementis deſiderari. Geometriæ practicæ fontes indico ſuis locis. Tum ſi quid illuſtre ad rem occurreret, non omiſi. Varia deinde, in quibus laboratum hucuſque fuit, vel explicare vel demonſtrare conatus ſum.*

6 *In lib. primo parallelarum theoria demonſtratur independenter ab undecimo axiomate, quod non axioma, ſed theorema eſt, & quidem non niſi difficulter, ac longo circuitu demonſtrabile.*

7 *Secundum librum, in quo laborare multùm tyrones ſolent, diſpoſui ad eum ferè modum, quo jam analyſtæ ſcribunt æquationes ſuas. Quem ſi exactè tenere voluiſſem, fuiſſet quidem res brevior; ſed minus, ut arbitror, tyronibus accommodata.*

8 *In lib. 3. ad prop. 16. paradoxa anguli contactus, quæ hactenus torſere omnes, ſolvuntur.*

9 *In 5. lib. proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur, ſatis ſpinoſam, efficere planiorem conatus ſum. Itaque primum proportionum elementa, faciliori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur. Deinde hujus lib. ſextam definitionem, quæ*

pro-

proportionum æqualitas per multiplices explicatur, oſtendi non definitionem eſſe, ſed theorema, & quidem difficile & perobſcurum; cujus etiam demonſtrationem exhibemus hactenus à nullo datam. Atque ita demonſtrationes Euclidæas, quæ hinc ducuntur omnes, ſi quis fortè illas præ noſtris probationibus deſideret, ſtabilivimus. Tum aliud quoddam æqualium proportionum aſſigno ac demonſtro indicium univerſale primum facillimum, ex quo omnes 5. lib. propoſitiones demonſtrare potuiſſem, ſi hoc conducere diſcentibus judicaſſem. Poſtremò de proportionibus non pauca ſcitu neceſſaria ſubjungo, ac inprimis demonſtro axioma illud percelebre, ſeu potiùs theorema: proportionem extremorum ex quotlibet intermediorum proportionibus componi, id quod hactenus in Geometria fuit deſideratum.

10 *Lib. duodecimum, cujus difficiles ac prolixæ demonſtrationes diſcentibus terrori eſſe ſolent, alia via plus quàm decies breviori demonſtravi. Quod ita ſe habere, qui hæc noſtra cum Euclide, ejuſque commentatoribus contulerit, deprehendet.*

11 *In libris quarto, ſexto, undecimo præſtantur ea, quæ univerſim ſuprà indicavimus.*

12 *Denique ſelecta ex Archimede theoremata alia ſimiliter ac breviori via demonſtrata adjunxi, eximiamque illius de cylindro ac ſphæra doctrinam poſtremis tredecim propoſitionibus adjectis, ampliavi, quibus inter cætera demonſtro ſeſquialteram proportionem ab eo in cylindro ſphæraque repertam, ab æquilatero cono eidem ſphæræ circumſcripto, tàm in ſoliditate, quàm in ſuperficie continuari. Euclidi porrò Archimedæa illa ſubnexui, non quaſi adhuc elementa, ſed quia ſubtilitate pariter atque uſu eximia ſunt: tum deinde ut Geometriæ candidatus intelligat, cùm maximi Geometræ inventa admi-*

miranda aſſequi ſeſe viderit nihil in Matheſi futurum tàm ſubtile vel arduum, quod his inſtructus elementis percipere non poſſit.

Tu hæc habe; & ſi placuerint, lege ac diſce: inventurus in his principia nobiliſſimæ & fortè omnium antiquiſſimæ ſcientiæ; quod oſtendet tibi, quam ſubnecto

HISTO-

HISTORICA
NARRATIO
De ortu, & progreſſu Matheſeos.

MAthematum Elementa tradituro, viſum eſt de illorum origine, ac præſtantia præfari quædam, ut intelligant Matheſeos candidati, cujuſmodi ea ſcientia ſit, cui ſe conſecraturi ſunt; & planum fiat adverſus eos, qui, quæ ignorant, contemnunt, quantæ dignitatis ſint hæ diſciplinæ, quas omnium ætatum ſapientiſſimi viri incredibili ſtudio ſibi putaverint comparandas. Uſui porrò mihi fuit, in hac relatione concinnanda Petri Rami diligentia, qui Scholarum toto primo libro benè magno Mathematicam Hiſtoriam ex Proclo, Laertio, Vitruvio, Gellio, Polybio, Tzetze, aliiſque accuratè copioſèque conſcripſit.

Prima hominum ſcientia Matheſis fuit, ſi Joſepho credimus. Is lib. 1. cap. 3. ſcribit, Sethi nepotes Cœlorum ordinem, ac ſiderum curſus obſervaſſe. Ne autem hæc inventa ex hominum notitia dilaberentur, cùm Adamus univerſalem mundi interitum fore prædixiſſet, unum diluvio, incendio alterum, excitarunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam: & utrique ſua inventa inſcripſerunt, ut ſi lateritiam diluvio deleri contingeret, lapidea ſuperſtes hominibus diſcendi copiam faceret, & quæ inſcripta continebat, ſpectanda exhiberet. Ajunt enim lapideam illam ab ipſis dedicatam: quæ & noſtris temporibus extat in Syria. Hæc ille, penes quem fides eſto.

Poſt diluvium primos mortalium Aſſyrios, & Chaldæos Mathemata coluiſſe tradunt idem Joſephus, Plinius,

nius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldæos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldæa & Aſſyria ad Ægyptios translatæ ſunt auctore Abrahamo. Is enim cùm Deo jubente ex patrio ſolo in Palæſtinam, ac deinde in Ægyptum profectus eſſet, cerneretque Ægyptios artium bonarum capi ſtudio, atque indolè ad diſcendum egregia eſſe, ut apud eundem Joſephum eſt lib. 1. cap. 9. Arithmeticam illis Aſtronomiamque, quam præcedere Geometriam neceſſe fuit, communicavit. Quibus deinde ſtudiis adeò Ægyptii floruere, ut Ariſtoteles 1. Metaph. cap. 1. affirmet, Mathematicas artes primùm in Ægypto à ſacerdotibus publica vacatione fretis inventas eſſe.

Exinde Matheſis ex Ægypto mare trajiciens ad Græciæ Philoſophos pervenit; Thales enim Mileſius, qui ante Chriſtum floruit annis 584. primus Græcorum cùm in Ægyptum veniſſet, Geometriam inde in Græciam tranſtulit. Is ſanè, præter alia, primi libri propoſitiones, 5, 15, 26 invenit. Eidem debentur 2, 3, 4, 5, l. 4. cujus inventi lætitia elatus bovem immolaſſe dicitur. Idem Æquinoctia & ſolſtitia obſervare cœpit, Laertio teſte, & ſolis eclipſim, ut ſcribunt Hippias & Ariſtoteles, primus prædixit; & Tzetzes Auctor etiam eclipſim lunæ Regi Cyro prænunciaſſe. Quapropter hic primus in Græcia Mathematicæ ſcientiæ parens atque Auctor fuit.

Poſt hunc Pythagoras Samius ille Philoſophorum antiquiſſimus Mathematicas diſciplinas vehementer auxit ornavitque. Et Arithmeticam quidem ita coluit, ut omnis propè illi ratio philoſophandi ex numeris duceretur. Geometriam verò, ut refert Laertius à materia abſtraxit primus; in qua mentis elatione invenit 32, 44, 47, 48, lib. 1. Sed in primis ob inventas 32 & 47 lib. 1. celebratur, & hujus quidem inventionis lætitia tanta affectus eſt, ut teſte Apollodoro apud Laertium, hecatombem immolarit. Idem incommenſurabiles magnitu-

dines,

dines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Aſtrologiam & Muſicam impensè & docuit & exercuit. Neque ſolùm acutè & ſubtiliter multa invenit, ſed etiam ludum primus aperuit, in quo juventus tàm honeſtas, tàmque nobiles artes addiſceret.

Pythagoram Anaxagoras, Clazomenius, & Oenopides Chius ſecuti ſunt, quorum meminit Plato in Amatoribus, ubi adoleſcentes de Anaxagora, & Oenopide in circulorum deſcriptionibus concertantes inducit. Ab Anaxagora Geometriam quandam ſcriptam indicat Ariſtoteles, & ex Laertio accepimus oſtenſum ab eo ſolem Peloponneſo majorem (nota Aſtronomiæ incunabula) eundemque de habitationibus in luna nonnulla diſputaſſe. Oenopidi adſcribit Proclus 12 & 23. lib. 1. Hos excepere Briſo, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes, tentata circuli quadratura, ab Ariſtotele reprehenſi pariter, & celebrati. Sed hos inter longè clariſſimus Hippocrates fuit, ille è mercatore philoſophus & Geometra, qui præter circuli quadraturam, etiam cubi duplicationem primus tentavit per duas medias proportionales, quam viam ut ſingularem & unicam omnis poſteritas amplexa eſt. Illius etiam illa propria & magna laus eſt, quòd Proclo teſte, elementa primus ſcripſerit, & ab aliis inventa ordinaverit.

Democritus non in Philoſophia ſolùm, ſed etiam in Matheſi admirabilis fuit, ejus tùm phyſica, tùm fortè etiam Mathematica monumenta perierunt invidia, (ut quidam ferunt) Ariſtotelis, ſua unius ſcripta cupientis legi. Democriti Philoſophiam Petrus Gaſſendus eruditiſſimo opere nuper edito inſtauravit. Theodorus Cyrenæus, licèt ejus inventa Mathematica non extent, vel eo nomine magnus eſt, quòd Platonis Magiſter fuiſſe memoretur.

Ad Platonem igitur aliquandò pervenimus, quo nemo alius ſplendorem majorem attulit Mathematicis diſcipli-

ſciplinis. Ille Geometriam maximis acceſſionibus amplificavit, ſtudio incredibili in eam collocato. Et in primis reperta eſt ab eo Analyſis, certiſſima inveniendi & ratiocinandi via. Philoſophiæ ſuæ libros Mathematicis rationibus diſtinxit, ac quidquid in Mathematicis admirabile conjunctum cum Philoſophia eſſet, excitavit. Academiæ foribus inſcriptum legebatur: οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω; nullus Geometriæ expers accedito; illuſtri ſanè argumento, quàm non aliena ſed propria, quàmque non inutilis, vel indecora, ſed honeſta & commoda Matheſis, ſanæ certæque Philoſophiæ ſit. Quantus certè Plato Matheſeos fuerit & admirator & cultor, is demum intelliget, qui ejus monimenta perlegerit.

Ex Platonis Academia propè innumeri deinceps Mathematici prodierunt. Tredecim Platonis familiares à Proclo commemorantur, quorum ſtudiis Mathematica ſit abſoluta. Hinc Leodamas Thaſius, Archytas Tarentinus, Theætetus Athenienſis; à quibus Mathemata egregiè ſunt amplificata. Leodamas Analyſim à Platone acceptam exercuit, ejuſque ope inveniſſe multa à Laertio dicitur. Theætetum tùm inventa ſua, inter quæ Elementa ab eo ſcripta, & regularium corporum inſcriptio celebrantur, illuſtrem faciunt; tùm Platonis encomia, qui etiam illius nomini dialogum inſcripſit. Architas Elementa ſcripſit etiam ipſe, ejuſque duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cujus etiam illa ſingularis fuit laus, quòd Mathematicam ad humanos uſus traduxerit ferè primus; unde & lignea columba ab eo facta volaſſe legitur apud Gellium. Quem ſecuti Dædalus, aliique artifices fabulis poetarum materiam præbuere. Archytas porrò & Mathematicus fuit & exercitus Imperator, qui nimirùm in patriis bellis copiis civium ſuorum quinquies præfuit. & quinquies vicit. Neoclidis tantùm nomen celebratur, Leonte fortaſſis diſcipulo illuſtrior, quàm inventis ſuis. Leon

ſanè

ſanè Mathematicæ univerſæ elementa conſcripſit, auxit, & ad uſum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores ſuo merito cenſeri debet.

Audaxus Gnidius ſuperiorum æqualis in Arithmeticis magnus & (ſi Scholiaſtæ Græco credimus) totum ei Quintum librum debemus; Elementa item conſcripſit, & generaliora effecit, & ſectiones à Platone inchoatas auxit; inſuper aſtronomicarum hypotheſeum primus fabricator extitit, & Geometriæ fontes, ut ſuprà Archytas, ad organicam ac mechanicam derivavit. Amyclas Heracliotes & Menechmus, ejuſque frater Dinoſtratus, Helicon, Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius, Philippus Mendeus, omnes Platonici, Geometriam multò perfectiorem reddiderunt. Et Menechmus quidem ſectiones conicas invenit, ac harum ope duas medias, cujus inventio ab Eutocio reliquis præfertur. Theudius, & Hermotimus elementa fecerunt univerſaliora, & auctiora. Atque hi omnes ex Platonis Academia, Mathematicam Philoſophiam ad perfectionem adduxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor, & Ariſtotelis magiſter, ipſeque Ariſtoteles cognitione Mathematum clari fuere. Illius cùm auditor quidam eſſe vellet Geometriæ imperitus, abi, inquit, anſas enim Philoſophiæ non habes.

De *Ariſtotele* verò quid dicam? libri illius omnes locis Mathematicis ſunt referti, ex quibus in unum collectis librum confecit Blancanus. Ex Ariſtotelis ſchola duo præcipuè celebrantur Eudemus, & Theophraſtus. Hic ſcripſit de numeris libros duos, de Geometria quatuor, de lineis individuis unum: ille hiſtoriam Mathematicam condidit, ex quo Proclus, aliique ſua mutuati ſunt. Aryſteo, Iſidoro, Hypſicli Geometris ſubtiliſſimis ſolidorum libros maximè debemus. Denique Euclides aliorum inventa collegit, ordinavit, auxit, demonſtravitque accuratiùs, eaque nobis reliquit elementa, quibus jam ubique terrarum ad Mathematicam juven-

ventus inſtituitur. Obiit anno ante Chriſtum 284. Euclidem ſecuti ſunt centum ferè poſt annis Eratoſthenes, & Archimedes. Eratoſthenis clarum in primis nomen fuit, ſed ejus ſcripta periere. Archimedis habemus multa, multa amiſimus.

Sed Archimedem cùm nomino, apicem quendam humanæ ſubtilitatis, totiuſque Mathematicæ diſciplinæ abſolutionem animo concipio. Ejus inventa admiranda prodidere Polybius, Plutarchus, Tzetzes, aliique. Archimedi coævus fuit Conon Geometra & Aſtronomus, cujus mortem Archimedes deflet in lib. de quad. parab. Archimedem & Cononem intervallo non magno ſequitur Apollonius Pergeus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius extant quatuor Conicorum ſubtiliſſimi libri. Eidem adſcribuntur Euclidis libri 14. & 15, ab Hypſicle contracti. Hipparchus & Menelaus, de ſubtenſis in circulo hic 6, ille 12. libros primi conſcripſere, pro quo invento tàm utili, & neceſſario non parva utrique laus & gratia debetur. Extant etiam Menelai de triangulis ſphæricis libri tres. Theodoſii Tripolitæ utiliſſimi ſphæricorum libri tres in omnium manibus verſantur. Atque hi quidem, ſi Menelaum excipias, ante Chriſtum vixere omnes.

Anno poſt Chriſtum 70. venit in lucem Claudius Ptolomæus, aſtronomorum princeps, vir planè mirabilis, ſupraque (inquit Plinius) naturam mortalium. Is verò non Aſtronomiæ tantùm, ſed etiam Geometriæ peritiſſimus fuit; quod teſtantur, tùm alia multa ab eo ſcripta, tùm in primis libri de ſubtenſis, Menelai quidem 6, Hipparchi verò 12, ab illo ad 5. theoremata contracti. Plutarchi etiam nominatiſſimi Philoſophi extant Mathematica problemata. Jam Eutocii Aſcalonitæ erudita in Archimedem commentaria quis ignorat? Ab eo Philonis, Dioclis, Nicomedis, Spori, Heronis, tamquam excellentium in Mathematicis Magiſtro-

giſtrorum inventa de duplicando cubo recenſentur. Et Heronis quidem tàm in mechanicis, quàm in Geometricis excellens ingenium fuit. Cubi certè duplicatio ab eo tradita, à Pappo lib. 3. p. 7. laudatur præ omnibus. Cteſibii Alexandrini, cui antlias debemus noſtras, admiranda opera à Vitruvio, Proclo, Plinio, Athenæo celebrantur. Gemini quoque non minimum inter Mathematicos nomen eſt, quem Euclidi ipſi Proclus in quibuſdam præpoſuit.

Diophantus, & ipſe Alexandrinus, in Arithmetica tantus fuit, quantus in Geometria Archimedes, Apollonius, Euclides; verè totius numericæ ſubtilitatis magiſter; à quo reperta ſit admirabilis illa ars, quam Algebram dicimus; quæ hiſce temporibus à Franciſco Vieta, & Renato Carteſio multò perfectior & univerſalior effecta eſt. Reliqui inter veteres celebrantur Nicomachus Arithmeticis, Geometricis, Muſicis clarus monimentis, Serenus binis de cylindri ſectione libris Geometris notiſſimus, Proclus, Pappus, Theon. Quantus Mathematicus fuerit Proclus ex doctiſſimis ejus in Euclidem commentariis, aliiſque ſcriptis manifeſtum eſt. Atque hic opinor ille eſt, qui, ut refert Zonaras, & ex eo Ramus, ac Baronius, ſub annum Chriſti 514, Vitaliani claſſem Conſtantinopolim obſidentis, optico ſpeculorum artificio combuſſit. Theonis laudes verè magnas mirabiliter exaggerat Petrus Ramus, ut etiam libros, quos Euclidi hactenus adſcripſere omnes, Theoni putet attribuendos. Sed iniquior ubique in Euclidem Ramus, neque ullo ſolido nixus fundamento, hic audiendus non erit. Ut finis aliquando ſit, agmen Pappus claudat tempore inter veteres poſtremus, ut qui vixerit annum 400. ſed nominis claritudine, omnique laude Mathematum primis adnumerandus. Quæ ante Hypſiclem, Cteſibium, & Diophantum protulerat fœcunda ingeniorum parens Alexandria, hunc quoque ingenti bono Matheſeos

ſeos

ſeos dedit. Scripſit collectionum Mathematicarum libros ſeptem, è quibus duo primi perierunt. Reliqui quinque tàm multis abundant, tàmque variis, ex omni propè genere Mathematum nobiliſſimis inventis, ut inter prima, quæ extant veterum monimenta, ab omnibus cenſeantur.

Habetis originis ac progreſſionis Mathematicæ Hiſtoriam brevem, ex qua Matheſeos antiquitas, præſtantia, ac dignitas apparet. Sanè Reipub. litterariæ principes, iidem qui Philoſophiam, etiam Mathematicam genuere, gemellas ſorores partu velut uno, quas qui diſtrahere ab invicem violentè velit, næ ille in nativam illarum concordiam, cum inſigni injuria crudelis ſit; quando, quod fieri in gemellis ſolet, uno vel loco vel morte ſublato, languere, quin & contabeſcere alterum neceſse ſit.

ELE-

ELEMENTORUM
GEOMETRIÆ
LIBER PRIMUS.

SCientiæ proprium munus eſt, ex notionibus quibuſdam ſimpliciſſimis rationali naturæ à conditore Deo impreſſis elicere aliquid, quod priùs ignorabatur, atque inde rursùm aliud ex alio; ut prior cognitio ſemper ad ulteriorem ſit gradus. Quę ratio ſi accuratè teneatur, ex minimis, & per ſe notis ad rerum abditiſſimarum cognitionem pertingemus. Hanc methodum, rationemque ſcientiæ, præ omnibus amplexæ ſunt eæ diſciplinæ, quæ in quantitatis contemplatione verſantur. Quo fructu id factum ſit, ſciunt omnes, qui hiſce ſtudiis imbuti ſunt. Et ſanè Geometria (ut de aliis Matheſeos partibus jam nihil dicam) mirum eſt, quàm brevi ex apertiſſimis ad obſcuriſſima trahat, & ex humillimis ad altiſſima ſtatim aſſurgat. Statuuntur primò ſimpliciſſima quædam, facillimaque principia, quibus nemo ratione præditus diſſentire poſſit. Deinde nihil aſſeritur, vel admittitur, quod ex ejus infallibili ratiocinio non ſit deductum. Atque ita demùm admiranda theoremata, ab omni humano ſenſu, & cognitione remota, incredibili certitudine, ac evidentia innoteſcunt.

Principiorum genera, ex quibus Geometria omnis derivatur, ſunt tria; Definitiones, Poſtulata, Axiomata.

DEFINITIONES.

1 PUnctum eſt ſignum in magnitudine individuum.

Hoc eſt, quod dividi ne cogitatione quidem poſſit. Punctum omnis magnitudinis quaſi principium eſt, ſicut unitas numeri.

2 Linea eſt magnitudo tantùm longa.

Nimirùm carens omni latitudine. Intelligitur generari ex fluxu puncti.

3 Lineæ termini ſunt puncta.

Fig. 1. *tabula* 1. 4 Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis terminis interjicitur.

Vel ut Archimedes: Recta linea eſt minima linearum eoſdem terminos habentium; ſive eſt omnium breviſſima, quæ inter duo puncta duci poſſunt.

Vel ut Plato: Recta linea eſt, cujus extrema obumbrant omnia media.

Unus omnium ſenſus eſt. Inſtrumentum, quo rectæ lineæ deſcribuntur, regula eſt, quæ utrum recta ſit, hoc examine licebit cognoſcere.

Juxta regulam deſcribatur linea; tùm regulam inverſam, ſic ut extremitas priùs dextera, jam ſit ſiniſtra, rursùm applica lineæ priùs deſcriptæ, ſi planè cum illa congruat, recta eſt regula, ſi non congruat, non erit recta. Ratio pendet ex axiomate 13.

5 Superficies eſt magnitudo tantùm longa, & lata.

Duas ergo habet dimenſiones. Intelligitur generari ex fluxu lineæ.

6 Superficiei extrema ſunt lineæ.

7 Planum, ſive ſuperficies plana eſt, quæ ex æquo inter ſuas extremas lineas jacet.

Vel

Vel ut Hero: ſuperficies plana eſt, cujus omnibus partibus recta linea accommodari poteſt.

Generatur enim ſuperficies plana ex fluxu lineæ rectæ.

Vel: plana ſuperficies eſt, cujus extrema obumbrant omnia media.

Vel: plana ſuperficies eſt minima omnium eoſdem terminos habentium. *Idem ſenſus eſt omnium.*

Non definivit hìc corpus, ſive ſolidum Euclides, quia nondum hìc erat acturus de corpore. Ne quis tamen illius definitionem deſideret: corpus eſt magnitudo longa, lata, & profunda. Tres igitur dimenſiones habet corpus, ſuperficies duas, linea unam, punctum nullam.

8 Angulus planus eſt duarum linearum, in plano ſe mutuò tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Angulum igitur efficiunt duæ lineæ B *A*, C *A* *ſe mutuò tangentes in* *A*, *ſic ut non exiſtant ſibi mutuò in directum; hoc eſt, non efficiant unam lineam.* Fig. 2. 4.

9 Latera, ſeu crura anguli ſunt lineæ, quæ angulum efficiunt.

10 Vertex anguli eſt punctum (A) in quo crura ſibi mutuò occurrunt. Fig. 2. 4.

Cùm angulus eſt unicus, una littera ad verticem poſita deſignatur. Cùm plures ad unum punctum exiſtunt, deſignantur tribus litteris, quarum media denotat verticem anguli; vel etiam ſubinde unica lateribus prope verticem interpoſita. Sic in figura 5. angulus, qui fit à lineis B *A*, C *A* *deſignatur vel litteris tribus* B *A* C, *vel unica* O. Fig. 5.

11 Anguli æquales, vel potiùs ſimiles dicuntur, ſi, cùm ſibi invicem vertices imponuntur, Fig. 2. 3.

latera unius congruant lateribus alterius.
Ad hoc non requiritur, ut latera ſint æquè longa.

Fig. 5. 12 Inæquales, ſeu diſſimiles dicuntur anguli, cùm, vertice, & uno latere congruentibus, alterum non congruit: & ille major dicitur, cujus latus cadit extrà. *Sic angulus B A E major eſt angulo B A C.*

Angulus non minuitur, vel augetur, licet crura minuas, vel augeas.

Porrò quia anguli natura in linearum inclinatione conſiſtit, inclinatio autem linearum quantitas non eſt, neque angulus ullus quantitas erit. Et ſanè eodem jure curvitas eſſet quantitas, quo angulus, cùm ab invicem non magis differant, quàm inflexio, & infractio. Quando igitur cum Euclide, aliiſque Geometris angulos æquales eſſe dicemus, nihil aliud, quàm inclinationum ſimilitudo, hoc eſt, laterum congruentia indicabitur. Vide quæ de hac re pleniùs dicturi ſumus poſt propoſitionem 16 l.3.

Fig. 2. 4. 13 Angulus rectilineus eſt, quem rectæ lineæ efficiunt; curvilineus, quem curvæ; mixtus, quem recta, & curva.

Fig. 6. 14 Cùm recta (CA) ſuper rectam (BF) conſiſtens in neutram inclinat partem, ac proinde angulos utrimque facit æquales (CAB,) & CAF,) rectus eſt uterque æqualium angulorum. Recta autem (CA) alteri inſiſtens dicitur perpendicularis, ſeu perpendiculum.

Angulus rectus ſic ètiam definiri poteſt.

Fig. 6. Rectus angulus is eſt (BAC), cui à parte altera æqualis oritur (CAF,) ſi unum latus (BA) produxeris.

Duæ regulæ ſic compactæ, ut angulum rectum conti-

ti-

tineant, inſtrumentum efficiunt, quod norma appellatur. Illius inventorem Vitruvius cap. 2. lib. 9. affirmat Pythagoram. Tanta verò anguli recti vis eſt in rebus omnibus conſtruendis dimetiendis, formandis, & firmandis, ut nihil ferè effici ſine illo poſſit. Normæ examen ſic inſtituitur: ejus latus O E applica rectæ lineæ A F, & juxta latus alterum deſcribatur recta C A. Converſa deinde norma verſus B, ſi utroque ſuo latere congruat rectis C A, A B, ſcito eſſe legitimam, & exactam. Ratio patet ex ipſa def. 14.

15 Obtuſus angulus eſt (B A C), qui recto (FAC) major eſt. Fig. 7.

16 Acutus angulus eſt (LAI), qui recto (FAI) minor eſt. Fig. 8.

17 Figura plana eſt ſuperficies plana una, vel pluribus lineis undique terminata.

18 Circulus eſt plana ſuperficies, unius lineæ circuitu comprehenſa, quę circumferentia dicitur, à qua ad aliquod punctum intrà contentum (A) omnes, quæ duci poſſunt, rectæ lineæ ſunt ęquales. Fig. 9.

19 Hoc verò punctum centrum appellatur.

20 Diameter circuli eſt recta per centrum ducta (BC) ad circumferentiam utrimque terminata, & circulum bifariam dividens. Fig. 9.

21 Semidiameter, ſive radius eſt recta (AF) ex centro ad circumferentiam ducta. Fig. 9.

22 Semicirculus eſt figura (BLC) comprehenſa diametro (BC), & dimidia circumferentia (BLC.) Fig. 9.

Circulus ita generatur: ſi recta linea (A B) uno extremo ſuo (A) manente fixo in orbem circumagatur, recta ipſa circulum, extremitas illius altera (B) circumferentiam producet. Porrò mira circuli indoles vel in ipſo exor- Fig. 9.

tu ſuo apparet . Ad ejus namque geneſin contraria concurrunt, motus, & quies, dùm linea movetur, & ejus extremum quieſcit. Dein lineæ generantis puncta omnia, cùm inæquales eodem tempore periodos abſolvant, diverſa celeritate moventur.

Tertio peripheria circulum ambiens, conſtat quodammodo ex contrariis, & extremis ſine medio; ex concavo nimirum, & convexo, inter quæ rectum ità medium eſt, ut æquale inter magnum, & parvum, idque eò mirabilius eſt, quod ea contraria inſint lineæ nullam latitudinem habenti. Hæc tria Ariſtoteli viſa ſunt admiranda, ex quo illa deprompſimus. At prodigia circuli longè majora aperuimus in diſſertatione phyſico-Mathematica, quam unà cum Cylindricis, & annularibus in lucem emiſimus anno 1652. iſthic ea leget, qui volet.

Circumferentiam Mathematici partiri ſolent in 360. æquales partes (quas gradus vocant) ob multas illius numeri commoditates: ſemicircumferentiam in 180. quadrantem in 90.

23 Rectilinea figura eſt ſuperficies plana rectis lineis undique terminata.

24 Triangulum, ſive trilaterum eſt plana ſuperficies tribus rectis comprehenſa. *Hæc figurarum rectilinearum prima, ac ſimpliciſſima eſt, in quam cæteræ omnes reſolvuntur.*

Fig. 10. 25 Triangulum æquilaterum eſt, quod tria latera habet æqualia.

Fig:11.12. 26 Triangulum Iſoſceles, ſeu æquicrure, quod duo tantùm latera habet æqualia.

Fig. 13. 27 Scalenum, quod tria latera inęqualia habet.

Fig. 13. 28 Rectangulum triangulum eſt, quod unum angulum habet rectum.

29 Ob-

29 Obtuſangulum triangulum eſt, quod unum angulum habet obtuſum. *Fig.* 12.

30 Acutangulum triangulum eſt, quod tres habet acutos angulos. *Fig.* 10. 11.

3 Inter figuras quadrilateras rectangulum eſt, quod quatuor angulos habet rectos, adeòque æquales; *ſive latera æqualia ſint, ſive non.* *Fig.* 14. 15.

32 Quadratum eſt, quod æquilaterum, & rectangulum eſt, *ac proinde æquiangulum.*

Omne quadratum eſt rectangulum, ſed non contrà. *Fig.* 15.

33 Rhombus eſt, qui æquilaterus, ſed non æquiangulus eſt. *Fig.* 16.

34 Rhomboides, quæ adverſa latera, & angulos habens æqualia, neque æquilatera, neque æquiangula eſt. *Fig.* 17.

35 Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera (AB, FC, & BF, AC) ſunt parallela. Quid verò ſint parallelæ, dicetur ſequenti definitione. *Fig.* 14. 15. 16. 17.

Omne rectangulum, & quadratum eſt parallelogrammum, ut ſuo loco demoſtrabitur. Sed non contrà.

36 Rectæ lineæ parallelæ, ſeu æquidiſtantes ſunt, quæ in eodem plano exiſtentes utrimque in infinitum protractæ, æqualibus ſemper intervallis inter ſe diſtant. *Fig.* 18.

Æqualia intervalla deſumuntur penes perpendiculares. Quare ſi omnes ad unam ex duabus parallelam AB perpendiculares QL æquales fuerint, dicentur rectæ AB, CF parallelæ.

Generantur parallelæ, ſi recta LQ ad rectam AB perpendicularis, per AB ſemper perpendiculariter moveatur, tunc enim ejus extremum L deſcribit parallelam CF.

Euclides definit parallelas eſſe, quę utrimque in infinitum productæ in neutram partem coincidunt. Verùm, quia dantur lineæ, quæ ſimul in infinitum productæ, licet ad ſe mutuò appropinquent ad intervallum quovis dato minus, ac proinde, licet non ſint parallelæ, nunquam tamen concurrant, (cujuſmodi ſunt hyperbola, & recta linea; conchois, & linea recta; item duæ æquales parabolæ circa eundem axem deſcriptæ, & plures aliæ) non videtur per ſe notum eſſe, duas rectas, licet nunquam concurrant, fore ſemper æquali intervallo diſſitas, hoc eſt æquidiſtantes: poſſet enim quiſpiam objicere, fieri fortaſſis poſſe, ut etiam ipſæ, licet ad ſe mutuò ſemper appropinquarent, tamen nunquam concurrerent. Quare Euclidæa definitio paralleliſmi naturam non ſatis explicat.

Fig. 17. 37 Parallelogrammi, & cujuſvis quadrilateri diameter eſt recta (A F) per angulos oppoſitos ducta.

38 Figuræ planæ pluribus lateribus, quàm quatuor comprehenſæ, multilateræ, ſeu multangulę, ſeu græca voce polygonæ vocantur.

Fig. 19. 39 Rectilineæ figuræ externus angulus eſt, qui latere producto extra figuram oritur. *Tales ſunt FBC, GCA, HAB. Tot igitur figura qualibet habet externos angulos, quot latera, & angulos internos.*

Poſtulata.

POſtulatum eſt, quod facilè fieri poſſe per ſe ſit manifeſtum. Poſtuletur ergo, ut concedatur.

1 A quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

2 Rectam lineam terminatam in directum, & continuum protendere.

3 Quo-

3 Quovis centro ad quodvis intervallum circulum deſcribere.

Axiomata.

Axioma eſt ſententia per ſe manifeſta.

1 Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe æqualia ſunt. Et quod uno æqualium majus, aut minus eſt, majus quoque, aut minus eſt altero æqualium: & converſim.

2 Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

3 Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanebunt, erunt æqualia.

4 Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5 Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

6 Quæ ejuſdem dimidia ſunt, inter ſe ſunt æqualia: & quæ ejuſdem ſunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter ſe æqualia ſunt.

7 Quæ mutuò ſibi congruunt, æqualia ſunt.

Non rectè Clavius hoc Axioma convertit.

Falſum eſt enim, ea, quæ univerſim inter ſe æqualia ſunt, ſibi mutuò congruere: diſſimiles enim magnitudines poſſunt eſſe æquales, neque tamen congruent. Quòd ſi ſimiles, & æquales fuerint, valebit converſa. Statuamus igitur axioma:

8 Si rectæ lineæ æquales fuerint, ſibi mutuò congruent: & anguli, ſi æquales fuerint, ſibi mutuò congruent.

9 Totum ſua parte majus eſt.

10 Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

Euclidis axioma undecimum eſt: Si in duas rectas AB, CF incidens recta GI angulos ad eandem partem Fig. 20.

tem

tem interiores B L Q, F Q L, fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ ſi protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam ſpectant anguli duobus rectis minores.

Hoc verò non eſt clarius illo, quod Prop. demùm 29. Euclides ipſe demonſtrat: videlicet: ſi anguli B L Q, F Q L, fuerint duobus rectis æquales, rectæ A B, C F, nunquam concurrent.

Quare axioma illud è principiorum numero cum Gemino, & Proclo, aliiſque Geometris rejicimus: eſt enim non axioma, ſed theorema, idque demonſtrabimus poſt Propoſitionem 31. hujus libri.

Ejus loco alia duo ſequentia ſubſtituo, quorum Ex defi. 36. *veritas ex definitione parallelismi ſtatim apparet. Eſto igitur axioma.*

11 Parallelæ lineæ communi perpendiculo utuntur.

Hoc eſt, recta, quæ ad parallelarum unam eſt perpendicularis, eſt quoque perpendicularis ad alteram.

Fig. 21. 12 Perpendicula bina (L O, Q I) ex parallelis æquales utrinque intercipiunt partes (L I, O Q.)

13 Duæ rectæ lineæ ſpatiũ non comprehendunt.

Ad hoc ſiquidem opus eſt ad minimum tribus.

14 Duæ rectæ lineæ nequeunt habere ſegmentum commune, & omnes rectæ punctualiter ſe interſecant.

Fig. 22. *Recta A X occurrat rectæ Z D, ea ſi producatur non perget per D A, ſed in E, ſic ut rectam X B non niſi punctualiter interſecet. Axioma ex notione ipſa rectæ lineæ evidentiſſimum eſt. Tamen, quia nonnulli tàm ſubtiliter philoſophantur, ut credant, rectas lineas aliqua ſui parte commiſceri poſſe, lubet in eorum gratiam hoc axioma ampliùs declarare.*

Habeant, ſi fieri poteſt, duæ rectæ A X, A Z,

par-

partem communem A D. Centro A deſcribatur circulus ſecans rectas in B, & C, tùm accipiatur arcus B F æqualis arcui B C, & intelligatur ducta eſſe recta F A.

Rectæ igitur C A, & F A eundem prorsùs ſitum habent reſpectu rectæ B A. Sed recta C A cum recta B A habere dicitur commune ſegmentum D A, ergo etiam recta F A, habet cum B A commune ſegmentum D A.

Tres jam igitur rectæ C A, B A, F A commune D A. ſegmentum habent.

Sumatur rursùs arcus F G æqualis prioribus B F, & C B, & intelligatur ducta eſſe recta G A. Rursùm liquet rectas B A, G A, eundem habere ſitum reſpectu rectæ F A; ſed jam oſtenſum eſt, rectā B A habere cum recta F A commune ſegmentum D A. Ergo etiam recta G A, cum F A commune habet ſegmentum D A.

Jam ergo rectæ quatuor C A, B A, F A, G A commune D A ſegmentum habent. Eodem prorsùs modo oſtendam ſi per totam circuli circumferentiam ſumantur arcus prioribus æquales, omnes ſimul circumquaque rectas lineas ductas ad A unum idemq; habituras commune ſegmentũ D A. Hoc tàm immane abſurdũ ſequitur ex eo, quòd ponerentur binæ rectæ C A, B A habere ſegmentum commune. Impoſſibile eſt igitur, ut duæ rectæ ſegmentũ commune habeant.

In hoc axiomate vis tota nititur illius celebrati in ſcholis argumenti, quo demonſtratur, magnitudinem ex punctis omninò indiviſibilibus numero finitis componi non poſſe: & eſt ejuſmodi. Conſtent, ſi fieri poteſt, magnitudines ex punctis. Circa idem centrum deſcriptæ intelligantur quotcumque circumferentiæ circulares, & ponatur extima, ſeu maxima componi

ex centies mille punctis, à quibus ſingulis ad centrum commune ductæ intelligantur rectæ lineæ.

Ex axiomate jam explicato certum eſt, rectas illas nuſquam commiſceri, niſi in centro ſolo. Quare dum omnes medias peripherias pertranſeunt, in iis æquè multa deſignant puncta, ac erant in extima. Omnes igitur circumferentiæ concentricæ æquè multis punctis conſtant, ac proinde omnes inter ſe æquales erunt. Atque ita circumferentia hac in charta deſcripta æqualis probabitur circumferentiæ firmamenti. Aliis propè innumeris demonſtrationibus hic error obruitur, ſed unam illam hoc loco attuli præ cæteris, quòd paſſim ſit decantata, & ex præſenti axiomate immediatè pendeat.

Propoſitionum aliæ faciendum aliquid proponunt, & vocantur Problemata; aliæ in ſola contemplatione ſiſtunt, quæ idcircò Theoremata inſcribuntur.

PROPOSITIONES.

Citationes requiſitæ reperiuntur ad marginem. Cùm citantur propoſitiones, primus numerus deſignat propoſitionem, littera (L) cum numero ſequenti librum denotat: ut ſi occurrat (per 5. l. 3.) ita leges (per propoſitionem quintam libri tertii). Figura quærenda ſemper eſt inter figuras ejus libri, in quo tùm verſamur: citationes reliquæ facilè intelligentur.

Traduntur hoc libro affectiones primæ triangulorum, & parallelogrammorum. Propoſitiones illuſtriores ſunt 32. 35. 37. 41. 44. 45. 47.

PRO-

PROPOSITIO I.

Super data recta (AB) triangulum æquilaterum conſtituere. *Fig. 23.*

Centro A intervallo AB *a* deſcribatur circulus FCB, & centro B intervallo eodem BA deſcribatur circulus ACL priorem ſecans in puncto C, ex quo ducantur rectæ CA, CB. *a Per Poſtul. 1.*

Dico, triangulum ACB factum eſſe æquilaterum. Nam recta AC eſt *b* æqualis rectæ AB, cùm ſint ejuſdem circuli FCB ſemidiametri; & recta BC etiam æqualis eſt eidem rectæ BA, cùm ambæ ſint ſemidiametri circuli LCA. Ergo AC, BC *c* ſunt æquales inter ſe; ac proinde omnia latera trianguli ſunt æqualia. Ergo triangulum *d* ACB & æquilaterum eſt, & ſuper data recta AB conſtitutum, quod erat faciendum. *b Per def. 18.* *c Per axio. 1.* *p Per def. 25.*

PROPOSITIO II.

Ad datum punctum (A) datæ rectæ (EF) æqualem ponere. *Fig. 24.*

Accipe circino *a* intervallum EF, & transfer ex A in D, erit recta AD par datæ EF. *a poſtul. 3.*

PROPOSITIO III.

Datis duabus rectis inæqualibus, de majore (GH) minori (EF) parem auferre (GI.) *Fig. 24.*

Accipe circino *b* intervallum minoris datæ EF, & transfer in majorem ex G in I. *b Poſtul. 3.*

PRO-

PROPOSITIO IV.

Fig. 25. *SI duorum triangulorum (X, Z) latus unum (B A) uni (F L), & alterum (C A) alteri (I L) ſit æquale, angulique (A, & L) ab illis lateribus facti etiam ſint æquales, æquabuntur etiam & baſes (BC, F I), & tota triangula (X, Z), & reliqui ad baſim anguli (B, F, & C, I), qui lateribus æqualibus opponuntur.*

Nam ſi intelligamus, triangulum Z triangulo X ſuperponi, latera L F, L I perfectè congruent *a* ſibi æqualibus lateribus A B, A C, ſicut puncta tria L, F, I, cadant ſuper tria puncta A, B, C, ergo tùm etiam baſis F I tota cadet ſupra totam baſim B C: ſed & anguli F, B, itemque I, C, totaque triangula ſibi mutuo tunc congruent. Omnia igitur per 7. ax. ęqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

a Per axi. 8.

Scholium.

Fig. 25. *SImili ferè ratiocinio theorema ſequens, cujus mox erit uſus, licebit demonſtrare.*

Si duorum triangulorum X, Z, latera B C, F I æqualia fuerint, & anguli illis lateribus adjacentes, nimirùm B, & C ipſis F, & I fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipſa æqualia erunt.

Si latus F I imponas lateri ſibi æquali B C, illi b *congruet. Tum verò ob æqualitatem angulorum F, B, & I, C etiam* c *F L cadet ſupra B A, & I L ſupra C A. Ergo etiam punctum, L, incidet in punctum A; (ſi enim caderet extra A, latera F L, I L, non inciderent in latera B A, C A.) Ergo omnia ſunt per axioma 7. æqualia.*

b Per axi. 8.

c Per axi. 8.

PRO-

PROPOSITIO V.

T*Rianguli Iſoſcelis, ſeu æquicruris ad baſim anguli (A, C) æquales ſunt.* Fig. 26.

Intelligatur triangulum A B C bis poſitum, ſed ſitu converſo *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis A B C, *c b a* ex hypotheſi æquale eſt latus A B lateri *c b*, & latus C B lateri *a b*, & angulus B angulo *b*; etiam *q* ad baſim angulus A angulo *c* æqualis erit. Quod erat demonſtrandum, iidem enim ſunt anguli C, & *c*. *q. per 4. l. 1.*

Corollarium.

Æ*Quilaterum ergo triangulum, etiam & æquiangulum eſt.*

PROPOSITIO VI.

S*I in triangulo (A B C) duo anguli (A, & C) æquales fuerint, etiam latera (A B, C B) iis oppoſita æqualia erunt.* Fig. 26.

Intelligatur triangulum A B C bis poſitum, ſed ſitu converſo *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis A B C, *c b a* æquatur latus unum AC, uni lateri *c a*, & angulus A angulo *c*, & angulus C angulo *a*; etiam reliqua omnia *o* erunt æqualia, ac proinde latus A B æquabitur lateri *c b*. Quod erat demonſtrandum, eædem enim ſunt lineæ C B, & *c b*. *o per Schol. prop. 4.*

Corollarium.

Æ *Quiangulum ergo triangulum, etiam æquilaterum eſt.*

PROPOSITIO VII.

E *St propter 8. quæ ſine illa ſeorſim propoſita demonſtrabitur.*

PROPOSITIO VIII.

Fig. 27. S *I duo triangula habuerint omnia latera ſibi mutuò æqualia (AC ipſi EF; CB ipſi FI; AB ipſi EI;) etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppoſitos habebunt æquales (C ipſi F; A ipſi E; B ipſi I.)*

Ponatur enim latus AB ſupra ſibi æquale EI. Tum verò punctum C vel incidet in punctum F, vel non. Si incidat in F, tota triangula congruent,
a Per axi. 7. ac proinde omnes anguli *a* æquales erunt.

Si C, cadat extra F, ducatur FC. Quoniam per hypotheſim latera EF, AC æquantur, erit *b* an-
Fig. 28. gulus EFC par angulo ECF. ergo IFC major
b per 5. l. 1. erit, quàm ECF. ergo IFC multò major erit, quàm ICF. Rurſùm, quia per hypotheſim IF,
c per 5. l. 1. BC æquantur, erit IFC *c* par ICF. Ergo IFC & multò major eſt, quàm ICF, & æqualis, quod eſt impoſſibile. Ergo C non cadit extra F. Ergo &c.

Plures caſus, quos hoc theorema admittit, conſultò prætermiſi, ne tyrones fatigarem. Neque verò difficulter eorum demonſtratio ex demonſtratione jam poſita elicietur.

PRO-

PROPOSITIO IX.

D*Atum angulum rectilineum (I A L) biſariam ſecare.* Fig. 29.

Ex lateribus anguli accipe circino æquales AB, AC; centris B, ac C deſcribe duos æquales circulos ſe ſecantes in F, ducaturque recta FA, hæc angulum biſecabit.

Ducantur enim BF, CF; triangula FAB, FAC ſunt ſibi mutuò æquilatera; nam latera AB, AC ex conſtitutione æqualia ſunt, & latera BF, CF, quia æqualium circulorum ſemidiametri, etiam æquantur, & AF utrique triangulo commune eſt. Ergo anguli BAF, CAF *a* æquales ſunt. Biſectus eſt ergo datus angulus I A L. Quod erat faciendum. *a Per 8. l. 1.*

Corollarium.

HInc patet quomodo angulus ſecari poſſit in æquales angulos 4. 8. 16. &c, ſingulas nimirùm partes iterùm biſecando.

Scholium.

M*Ethodum ſecandi angulos in æquales quotcunque circino, & regula hactenus nemo docuit.*

Ex Pappo tamen, & Archimede habemus curvas quaſdam lineas quadratricem videlicet, & ſpiralem, quarum adminiculo id obtinetur. Anguli triſectio perficitur à Pappo l. 4. prop. 31. præſidio hyperboles, quod etiam obtineri poteſt ope parabolæ, vel conchoides.

Mechanice datum angulum in quotcunque ſecabis æquales angulos, ſi ex anguli vertice A tanquam Fig. 30.

centro intra anguli crura arcum deſcribas, eumque dividas in quot placuerit æquas partes; rectę enim ex A per diviſionum puncta emiſſæ angulum ſecabunt in partes totidem æquales.

PROPOSITIO X.

Fig. 31. *Datam rectam finitam (AB) ſecare bifariam.*

a per 1. l. 1. b Per præced. Super data AB fac triangulum æquilaterum *a* AGB. Angulum ejus G *b* biſeca per rectam GC, eadem biſecabit rectam AB datam.

Nam in triangulis X, Z latus CG eſt commune, & per conſtructionem GB, GA æqualia, angulique iis contenti AGC, BGC æquales. c per 4. l. 1. Ergo baſes AC, BC *c* æquantur. Biſecta eſt ergo data AB. Quod erat faciendum.

Pro praxi ſatis erit centris A, & B, duos æquales circulos deſcribere ſe ſecantes in G, & L, ac ducere rectam GL.

PROPOSITIO XI.

Fig. 32. *Ex dato puncto (A) in data recta (LI) perpendicularem excitare.*

Circino cape æquales AC, AF. Centris C, & F deſcribe duos æquas circulos ſe ſecantes in B. Ex B ad A ducta recta erit perpendicularis.

a Per 8. l. 1. b Per defin. 14. Ducantur enim CB, FB. Triangula X, & Z ſibi mutuo æquilatera ſunt. Ergo anguli CAB, FAB *a* æquales. Ergo BA *b* perpendicularis eſt. Ex dato igitur puncto &c. Quod erat faciendum.

Praxis

Praxis tàm hujus, quàm ſequentis expeditur facillimè præſidio normæ.

PROPOSITIO XII.

E*X dato extra rectam infinitam (LQ) puncto (A) perpendicularem ducere.* Fig. 33.

Centro A deſcribe circulum, qui ſecet datam LQ in C, & I. Rectam CI biſeca *c* recta AB, ea erit perpendicularis. *c Per 10. l. 1.*

Ducantur enim AC, AI. Quoniam per conſtructionem triangula X, & Z. ſunt mutuò æquilatera, erunt anguli *d* CBA, IBA æquales. Ergo AB perpendicularis *e* eſt. Ex dato igitur puncto &c. Quod erat faciendum. *d Per 8. l. 1.* *e Per. def. 14.*

PROPOSITIO XIII.

R*Ecta (BA) ſuper rectam (CF) conſiſtens aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales.* Fig. 34.

Nam ſi BA inſiſtat perpendiculariter, erunt per def. 14. anguli BAC, BAF utrique recti, ſi verò BA inſiſtat obliquè, excitetur *a* perpendicularis AL. Quia tùm anguli inæquales CAB, FAB eundem locum occupant, quem duo recti CAL, FAL, ac proinde iis congruunt, erunt *b* his illi æquales. Quod erat demonſtrandum. *a Per 11. l. 1.* *b Per axio. 7.*

Corollaria.

1 EOdem modo demonſtrabitur, ſi plures rectæ, quàm una eidem rectæ inſiſtant, angulos effici duobus rectis æquales.

Fig. 37. 2 Duæ rectæ invicem ſe ſecantes BAC, FAL efficiunt angulos quatuor rectis æquales. Patet ex propoſ.

Fig. 36. 3 Omnes anguli circa unum punctum conſtituti conficiunt quatuor rectos. Patet ex Corol. 1. ſunt enim quatuor recti in plures partes ſecti.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 35. *Si duæ rectę (XR, ZR) ad idem utrimque punctum rectæ (QR) faciant angulos (XRQ, ZRQ) duobus rectis æquales, (XR, ZR) unam rectam efficient.*

Si negas, faciant XR, BR unam rectam. Ergo anguli XRQ, BRQ *b* conficient duos rectos; quod *c* eſt abſurdum, cùm ex hyp. XRQ, ZRQ duos rectos efficiant.

b Per 15. l. 1.
c Contra axioma 9.

PROPOSITIO XV.

Fig. 37. *Si duæ rectæ (BC, FL) ſe ſecuerint in (A,) erunt anguli ad verticem (A) oppoſiti æquales.*

Nimirùm LAB ipſi CAF, & BAF ipſi LAC. Nam, qui a B A inſiſtit rectæ LF, erunt LAB, FAB, *a* pares duobus rectis. Et, quia FA inſiſtit rectæ BC, erunt *b* quoque FAC, FAB pares duobus rectis. Ergo *c* duo ſimul LAB, FAB æquantur duobus ſimul CAF, FAB. Ablato igitur communi FAB, remanent *d* æquales LAB, CAF. Eodem modo oſtendam, æquales eſſe BAF, LAC.

a Per 13. l. 1.
b Per eand.
c Per axio. 1.
d Per axio. 3.

PRO-

PROPOSITIO XVI. & XVII.

Continentur in prop. 32. Neque ante illam adhibentur.

PROPOSITIO XVIII.

IN omni triangulo angulus (A) major eſt, qui majori lateri (BO opponitur. (O) minor, qui minori (AB) *Fig. 38.*

Nequit A eſſe par B, aliàs *a* latera BO, AO æquarentur contra hypotheſim. Nequit etiam A minor eſſe, quàm B. Nam ſi A minor eſt, B major, poterit intra angulum B per rectam BF fieri angulus ABF æqualis A. Tùm verò per 6. æquales erunt BF, AF, & ſi addas utrique, OF, erunt BF, FO æquales AO. Sed AO per hyp. minor eſt, quàm BO. Ergo etiam BF, FO minores ſunt, quàm BO, quod repugnat definitioni lineæ rectæ, quæ eſt omnium breviſſima. Angulus igitur A nec minor eſt angulo B, nec æqualis. Ergo major. Quod erat demonſtrandum. *a per 6. l. 1.*

PROPOSITIO XIX.

IN triangulo latus (BO) majus eſt, quod opponitur majori (A) angulo. (O) minus, quod minori (AB). *Fig. 38.*

Eſt converſa prioris. BO non eſt minus, quàm AO, aliàs per 18. angulus A eſſet minor angulo B contra hyp. Neque etiam BO æquale eſt AO, aliàs per 5. anguli A, B, æquarentur, rurſus contra hyp. Ergo BO

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

majus eſt, quàm A O. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo quælibet latera reliquo ſunt majora.

Eſt Archimedis inſtar axiomatis; immediatè ſiquidem patet ex definitione Archimedea lineæ rectæ, quam vide ſuprà in definitionibus.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 39. *Si à terminis unius lateris (AB) intra triangulum duæ rectæ junguntur (AO, BO) hæ lateribus trianguli (AC, BC) minores ſunt, majorem verè angulum (AOB) comprehendunt.*

a Per 20. li.1. 1 Pars. Produc AO in F, AC, CF ſunt *a* majores, quàm AF. Addita ergo communi FB, erunt AC, CB majores, quàm AF, FB. Rurſùm

b Per eãd. OF, FB ſunt *b* majores, quàm OB. Addita ergo communi AO, erunt AF, FB majores, quàm AO, OB. Ergo AC, CB ſunt multò majores, quàm AO, OB.

2 Pars demonſtrabitur in Coroll. 2. partis primæ prop. 32. Ea interim non utemur.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40. *Ex datis tribus rectis (BO, BL, LO,) quarum duæ qualibet reliqua ſint majores, triangulum conſtituere.*

Aſſuma-

Aſſumatur datarum una BL, atque una ejus extremitate B accepta pro centro, intervallo alterius datæ BO deſcribatur arcus.

Deinde accepta pro centro extremitate altera L intervallo tertiæ LO deſcribatur arcus priorem ſecans in O, ducanturque rectæ BO, LO. Dico factum.

Demonſtratio patet ex conſtructione.

PROPOSITIO XXIII.

AD datum in recta punctum (B) *angulum efficere æqualem dato* (*A.*) Fig. 40.

Ducatur utcunque CF ſecans latera dati anguli A. In data recta ex B accipe BL parem AF. Centro B intervallo AC deſcribe circulum; item alium centro L intervallo FC, qui priorem ſecet in O. Ex O ad B, & L duc rectas.

Erit angulus LBO par dato A.

Nam per conſtr. triangula ſibi mutuò ſunt æquilatera. Ergo per 8. anguli B, & A æquales.

Scholium.

IN gratiam tyronum viſum eſt hic nonnulla ad praxim angulorum neceſſaria proponere.

Anguli menſura eſt circuli peripheria, quæ ex A vertice anguli tanquam centro deſcribitur, ut patebit ex prop. ultima lib. 6. Fig. 41.

Itaque quot gradus continebit arcus BC inter anguli BAC crura interceptus, tot graduum dicetur eſſe angulus BAC. Et quoniam rectum angulum BAF metitur quadrans peripheriæ BF, gradus 90. continens, dicetur rectus. angulus

eſſe graduum 90. Similiter, quia duos rectos menſurat dimidia circumferentia in 180. gradus ſecta, & quatuor rectos circumferentia tota ſecta in gradus 360. dicentur duo recti efficere gradus 180. & quatuor recti gradus 360. His prænotatis praxes angulorum ſunt.

Fig. 42. 1 *Ad datum in recta punctum* B *angulum ſtatuere parem dato* A. *Ex* A *dati anguli vertice tanquam centro inter latera arcum deſcribe* C F. *Centro* B *puncto dato deſcribe eodem intervallo arcum* LZ, *ex quo aufer* LO *parem* CF. *Per* B, & O *duc rectam; erit* LBO *par dato* A.

Fig. 43. 2 *Dati anguli* O P Q *gradus examinare. Fit hoc facillimè per ſemicirculum corneum tranſparentem in* 180. *gradus diviſum. Centrum ſemicirculi pone ſupra* P *verticem anguli, & ſemicirculi radium* PL *ſupra anguli latus* PQ. *Arcus* LO *inter anguli crura interceptus oſtendet, quot graduum ſit datus angulus.*

Fig. 43. 3 *Angulum conſtruere datos continentem gradus, vt* 42. *Duc rectam* XQ, *in qua ſigna punctum* P. *Super* P *pone ſemicirculi centrum, ejuſque ſemidiametrum* PL *ſupra* PQ. *Ab* L *numera gradus* 42. *uſque in* O. *Per* O *ex* P *ducta recta dabit angulum* OPL *graduum* 42.

Horum omnium demonſtratio pendet ex ultima prop. lib. 6.

PROPOSITIO XXIV. & XXV.

Fig. 44. SI *duo triangula* (BAC, BAF) *duo latera* (BA, AC) *duobus* (BA, AF) *alterum alteri, æqualia habuerint; unum verò triangulum angulum illis lateribus contentum* (BAF) *majorem habeat altero* (BAC) *habebit quoque baſim* BF *majorem baſi* (BC.)

Et

Et ſi baſim majorem habuerit, habebit angulum majorem.

Centro A deſcribe per C circulum; is tranſibit per F, quia AC, AF ponuntur æquales. Ergo BF cadit ſupra C. Junge CF. Angulus BCF eſt major angulo ACF, hoc eſt per Prop. 5. angulo AFC, hoc eſt multò major angulo BFC. Ergo *a* BF oppoſita majori angulo BCF major eſt, quàm BC oppoſita minori BFC. *a Per 19. lib. 1.*

2 Pars patet ex prima parte, & ex prop. 18.

PROPOSITIO XXVI.

SI duo triangula (X, Z) duos angulos duobus æquales habuerint alterum alteri (B ipſi F, & C ipſi I,) & unum latus uni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos exiſtit (ut BC, FI), vel quod uni æqualium angulorum opponitur (ut AC, LI), reliqua omnia erunt æqualia. *Fig. 25.*

Ponantur primò æqualia eſſe latera BC, FI inter æquales angulos poſita: tùm verò, reliqua etiam omnia equalia eſſe, demonſtratum eſt in ſcholio prop. 4.

Ponantur deinde latera AC, LI æqualibus angulis B, & F oppoſita eſſe æqualia. Quia anguli B, C per hyp. æquantur angulis F, I, etiam reliqui A, L æquales erunt per coroll. 9. p. 32. quæ ab hac non dependet. Ergo per primam partem omnia reliqua ſunt æqualia.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 45. *SI duas rectas (AB, CF) parallelas ſecuerit recta GO, erunt 1. æquales alterni anguli (RLO, QOL, item BLO, COL) 2. externus (GLB) æqualis interno ad eandem partem (LOF) (item GLR ipſi LOC.) 3. duo ad eandem partem interni ſimul (ALO, COL) æquales duobus rectis; item duo BLO, FOL duobus rectis æquales.*

Fig. 46. 1 Pars. Ex O, & L duc perpendiculares OR, LQ, erant *a* hæ ad utramque parallelam AB, CF perpendiculares, & per def. 36. inter ſe æquales. Æquales quoque *b* ex parallelis auferent partes RL, QO. Ergo triangula, X, Z ſibi mutuò æquilatera ſunt. Ergo *c* anguli RLO, QOL alterni æqualibus lateribus RO, QL oppoſiti, ſunt æquales. Quod erat primum. Ex quo patet etiam, alternos reliquos BLO, COL æquales eſſe; nam, quia tàm BLO, ALO, quàm COL, FOL æquantur *d* duobus rectis, erunt BLO, ALO æquales ipſis COL, FOL: ablatis ergo æqualibus RLO, FOL erunt reliqui BLO, COL etiam æquales.

a Per axi. 11.
b Per axi. 12.
c Per 8. l. 1.
d Per 13. lib. 1.

2 Pars. GLB æquatur ad verticem *e* oppoſito RLO, ſed RLO æquatur per 1. partem LOF, ergo GLB externus æquatur interno LOF. Quod erat alterum.

e Per 15. lib. 1.

3 Pars. ALO per 1. partem æquatur FOL, atqui FOL cum COL *f* facit duos rectos, ergo etiam ALO cum COL facit duos rectos. Quod erat tertium.

f Per 13. lib. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

SI duas rectas (*AB, CF*) ſecans recta (*GO*) alternos angulos (*ALO, FOL*) equales fecerit, erunt (*AB, CF*) parallelę. *Fig. 47.*

Si negas, ſit ergo alia X L Z per punctum L ad C F parallela.

Ergo *a* angulus X L O par eſt alterno F O L; quod fieri non poteſt; cùm per hyp. A L O par ſit eidem F O L. *a Per præ.*

PROPOSITIO XXIX.

SI duas rectas (*AB, CF*) ſecans recta (*GO*) fecerit externum (*GLB*) æqualem oppoſito interno (*LOF*), vel duos ad eaſdem partes internos *ALO, COL* pares duobus rectis, erunt (*AB, CF*) parallelæ. *Fig. 45. vel 46.*

Per 15. G L B æquatur A L O oppoſito ad verticem. Sed per hyp. G L B æquatur L O F. Ergo etiam A L O æquatur ſibi alterno LOF. Ergo *b* AB, C F ſunt parallelæ. *b Per præced.*

Deinde C O L cum F O L facit duos rectos. Sed per hyp. idem C O L etiam cum A L O facit duos rectos. Ergo A L O, F O L alterni æquales ſunt. Ergo rurſum A B, C F *c* ſunt parallelæ. *c Per præced.*

Corollarium.

EX ſecunda parte patet, omne rectangulum eſſe parallelogramum.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

Fig. 45. SI *duæ rectæ* (*AB*, *CF*) *ſint parallelæ ad eandem rectam* (*D N*), *erunt inter ſe parallelæ*.

Patet per ſe, & ex præcedentibus. Nam ſi omnes ſecentur à recta G O, erit *a* angulus externus G L B par interno L D N; eſt verò L D N externus *b* reſpectu D O F, ac proinde æqualis. Ergo etiam G L B par eſt L O F. Ergo A B, C F ſunt *c* parallelæ.

a Per 27. lib. 1.
b Per 27. lib. 1.
c per præced.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 48. PEr *datum punctum* (*A*) *parallelam ducere ad rectam datam* (*C F*).

Ex A ducatur utcunque A L, ſecans datam FC. Ad punctum A fiat *d* angulus L A S par angulo A L F. Erit A S parallela ad C F, ut patet ex 28. cùm alterni anguli S A L, FLA ſint æquales.

d Per 23. lib. 1.

Praxis. Ducta AL, centro L deſcribe arcum IQ, & centro A eodem intervallo arcum O X, ex quo auſer O B parem I Q. Per A, & B ducta recta erit parallela.

Demonſtratio pendet ex 29. lib. 3.

Fig. 49. *Aliter. Centro quopiam P deſcribe circulum, qui tranſeat per datum punctum A, & ſecet datam C F in Q, & O. Arcui Q A accipe æqualem O N, recta A N erit parallela.*

Demonſtratio pendet ex 29. libri 3. & ex 28. hujus.

Scho-

Scholium.

DEmonſtrata jam igitur eſt parallelarum theoria independenter ab axiomate, quod Euclides, ejuſque interpretes aſſumunt minùs rectè, cùm non ſit axioma, ſed theorema, cujus veritas non magis per ſe apparet, quàm ipſius 29. propoſitionis. Quia tamen deinceps ſępiùs adhibebitur, id hoc loco jam facilè ex præmiſſis demonſtrabimus.

Theorema.

SI recta MA incidens in rectas BC, AD faciat angulos internos ad eaſdem partes BAD, ABC, duobus rectis minores, rectæ BC, AD concurrent verſus eam partem, quam ſpectant anguli duobus rectis minores. Fig. 50.

Quoniam per hyp. CBA, DAB duobus rectis ſunt minores, ſiant CBA, XAB duobus rectis æquales: eruntque BC, AX a parallelę. Aſſumo tanquam axioma per ſe notum, inter rectas AD, AX in infinitum productas duci poſſe aliquam ad AM parallelam, puta ZX, quę major ſit, quàm AB. Accipiatur ipſi ZX æqualis AR, & junge ZR. Quoniam AR, ZX ſunt parallelæ, erunt b alterni XZA, RAZ æquales. Sunt autem & latera XZ, ZA ęqualia lateribus RA, AZ per conſtr. Ergo etiam c anguli RZA, XAZ æquales ſunt. Ergo RZ eſt d parallela ad AX. Sed etiam BC eſt parallela ad AX. Ergo RZ, & BC ſunt e parallelę; Eſt igitur BC & parallela ad RZ, & incluſa triangulo ARZ. Ergo cùm produci in infinitum poſſit, neceſſariò occurret aliquando rectę AZ, nam neque evadere poteſt per ſibi parallelam RZ, neque pertingere in aliò.

a Per 29. l. 1.

b Per 27. l. 1.

c Per 4. l. 1.

d Per 28. lib. 1.

e Per 30. lib. 1.

Demonſtratio Clavii eſt à parallelis independens,

ſed

prolixiſſima, & multùm operoſa: Procli nititur hoc principio, quòd recta unam parallelam ſecans, etiam alteram ſectura ſit, ſi producatur. Verùm hoc per ſe notum non eſt; ob rationem datam ad def. 36.

Corollarium.

Fig. 50. *Hinc patet rectas non parallelas concurrere, de quo dubitari poterat ob rationem allatam ad def. 36. Sint rectæ non parallelæ BC, AZ. Duc AX parallelam ad BC; erunt XAB, CBA*
a Per 27. lib. 1. *duobus rectis a æquales. Ergo ZAB, CBA ſunt duobus rectis minores. Ergo per theorema jam demonſtratum BC, AZ concurrunt.*

PROPOSITIO XXXII.
PARS I.

Fig. 51. *Omnis trianguli externus quivis angulus (FBC) duobus internis oppoſitis (A, & C) æqualis eſt.*

a Per 31. lib. 1. Per B duc *a* BL parallelam ad AC. Quia duas parallelas BL, AC ſecat FA, erit externus an-
b. Per 27. lib. 1. gulus FBL interno A *b* æqualis. Et quia eaſdem parallelas BL, AC ſecat etiam recta BC, erit LBC ſibi alterno C *c* æqualis. Ergo totus FBC æqua-
c Per eand. tur utrique ſimul A, & C. Quod erat demonſtrandum.

Corollaria.

Fig. 51. 1 Externus angulus (FBC) quolibet internorum oppoſitorum A, vel C major eſt.

Fig. 39. 2 Angulorum (C & AOB) eandem baſim (AB) habentium,

bentium major eſt (A O B,) qui intrà cadit.

Producatur enim A O in F. A O B per hanc major eſt, quàm O F B; & O F B per hanc eandem major eſt, quàm C. Ego A O B multò major eſt, quàm C.

3 Si ab uno puncto (A) in unam rectam (BC) incidant duæ rectæ, altera (AO) obliquè, perpendiculariter verò altera (A F;) hæc cadet verſus partes acuti anguli A O B. Cadat enim, ſi fieri poteſt, adverſus obtuſum AOC, puta in Q. Igitur acutus A O B erit externus reſpectu recti A Q B, ac proinde illo major per coroll. 1. Quod eſt abſurdum. *Fig. 55.*

PROPOSITIO XXXII. PARS II.

O*Mnis trianguli tres ſimul anguli duobus rectis ſunt æquales.*

Ac proinde conficiunt gradus 180.

Produc unum latus AB in F. Externus angulus FBC duobus internis oppoſitis A, & C æqualis *a* eſt. Atqui *b* FBC cum C B A efficit duos rectos. Ergo etiam duo A, & C cum eodem CBA efficiunt duos rectos. Quod erat demonſtrandum. *Fig. 52.* *a per 1. partē hujus.* *b Per 13. l. 1.*

Aliter. Ducatur HM parallela lateri AC. Anguli alterni tàm O, A, quàm N, C, æquales *c* ſunt. Sed O, Q, N conficiunt *d* duos rectos. Ergo etiam A, C, Q duos rectos conficiunt. Quod erat demonſtrandum. *Fig. 53.* *c Per 27. l. 1.* *d Coroll. 1. p. 13. lib. 1.*

Corollaria.

4 TRes ſimul anguli cujuſvis trianguli æquales ſunt tribus ſimul cujuſcunque alterius.

5 Si in triangulo unus rectus eſt, reliqui ſunt acuti.

6 Si in triangulo unus eſt rectus, reliqui duo ſimul etiam unum rectum conficiunt.

7 In triangulo angulus, qui æquatur duobus reliquis, rectus eſt.

8 Cùm ſcitur quot graduum ſit unus angulus, ſcitur etiam quot gradus faciant duo reliqui ſimul. Et cùm ſcitur, quot gradus faciant duo anguli, aut eorum ſumma, ſcitur etiam, quot gradus efficiat tertius.

9 Cùm in uno triangulo duo anguli aut ſinguli, aut ſimul, æquales ſunt duobus angulis aut ſingulis, aut ſimul in altero triangulo, etiam tertius tertio æqualis erit.

10 Cùm duo triangula unum angulum æqualem habent, etam reliquorum ſummæ æquantur.

11 Cùm in Iſoſcele angulus æquis cruribus contentus eſt rectus, reliqui ad baſim ſunt ſemirecti. Et Iſoſcelis ad baſim anguli ſemper ſunt acuti.

12 Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias unius recti; facit enim tertiam partem duorum rectorum, ergo duas tertias unius.

Fig. 54. 13 Hinc anguli recti (BAC) facillima triſectio, ſi ſuper AC fiat triangulum æquilaterum Z. Nam cum FAC ſint duæ tertiæ unius recti, erit BAF recti una tertia.

Fig. 55. 14 Perpendicularis AF eſt breviſſima omnium, quæ ex puncto (A) ad rectam aliquam duci poſſunt. Quoniam enim angulus F rectus eſt, erit per coroll. 5. AOF acutus. Ergo *a* AF minor, quàm AO quælibet.

a Per 19. *lib.* 1.

15 Ex uno puncto ad unam rectam tantùm una perpendicularis cadit. Patet ex coroll. præced.

Scho-

Scholium.

Hujus pulcherrimi, fœcundiſſimique theorematis, cujus per Matheſim univerſam uſus propè immenſus inventor eſt Pythagoras teſte Eudemo veteri geometra. Frequentiſſimè ejuſdem meminit Ariſtoteles, qui illud etiam exemplum ſtatuit perfectiſſimæ demonſtrationis. Sed quemadmodum ex hac propoſitione jam didicimus, quot rectis angulis ejus anguli æquivaleant, ita ejuſdem beneficio, cujuslibet figuræ rectilineæ ſive interni, ſive externi anguli, quot rectos conficiant, præclarè innoteſcet tribus ſequentibus theorematibus.

Theorema 1.

Omnis quadranguli quatuor ſimul anguli efficiunt quatuor rectos. *Fig. 56.*

Nam ſi per oppoſitos angulos ducas rectam BF, hæc quadrangulum in duo triangula ſecabit, quorum anguli ſimul conficiunt a rectos quatuor. *a Per 32. l. 1.*

Theorema 2.

Omnes ſimul anguli cujuſcunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ.

Ex quovis puncto A intra figuram, ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ ſecabunt figuram in tot triangula, quot habet latera. Quare cùm ſingula triangula a conficiant duos rectos, omnia ſimul conficient bis tot rectos, quot ſunt latera. Sed anguli circa punctum A, b *conficiunt quatuor rectos. Ergo ſi ab omnium triangulorum* *Fig. 57.* *a Per 32. l. 1.* *b Coroll. 31. p. 13. l. 1.*

 angu-

angulis demas angulos circa A, anguli reliqui, qui componunt angulos figuræ, conficient bis tot rectos, demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ.

Hinc patet, omnes ejuſdem ſpeciei rectilineas figuras æquales habere angulorum ſummas; quod admiratione dignum eſt.

Praxis. Duplica denominatorem figuræ: a producto aufer 4. reſtabunt anguli recti, quos conficiunt anguli interni figuræ.

Theorema 3.

Fig. 58. OMnes ſimul externi anguli cujuſcumque figurę rectilineę, conficiunt quatuor rectos.

c. Per 13. lib. 1. *Nam ſinguli figuræ interni anguli cum ſingulis externis conficiunt duos c rectos. Ergo interni ſimul omnes cum omnibus ſimul externis conficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Sed (ut in præced. oſtendimus) interni ſimul omnes etiam cum quatuor rectis efficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Ergo externi anguli, & quatuor recti æquantur.*

Mira ſanè hæc figurarum rectilinearum proprietas eſt, ex qua illud etiam conſequitur, omnes cujuſcunque ſpeciei rectilineas figuras æquales habere externorum angulorum ſummas. Itaque trianguli alicujus tres externi anguli æquales ſunt mille externis angulis figuræ millelateræ. Quæ prorsùs admiratione ſunt digna.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 59. *SI duas rectas æquales, & parallelas (AB, CF) jungant duæ aliæ (AC, BF) erunt etiam illæ æquales, & parallelæ.*

Parallelas AB, CF ſecet AF; erunt in triangulis

Q, R alterni anguli B A F, C F A *a* æquales. Po- *a Per 27*
nitur autem latus A B æquale lateri C F, & A F *lib. 1.*
utrique triangulo eſt commune: Ergo *b* baſes *b Per 4. l.*
B F, A C æquantur (Quod erat primum.) Et *1.*
anguli ad baſim AFB; F A C ſunt æquales: ac
proinde A F incidens in rectas AC; BF facit al-
ternos A F B; F A C æquales: Ergo *c* A C; B F *c Per 28.*
ſunt etiam parallelæ: Quod erat alterum. *l. 1.*

PROPOSITIO XXXIV.

P*arallelogrammi oppoſita latera, & anguli æquantur, ipſumque à diametro biſecatur.* *Fig. 59.*

Quoniam A B, C F ſunt *a* parallelæ, in eaſque *a Per def.*
incidit A F; erunt alterni BAF; CFA *b* æquales. *35.*
Item quia A C; B F ſunt *c* parallelæ; in eaſque *b Per 27.*
incidit AF, erunt *d* alterni CAF; BFA æquales. *lib. 1.*
Ergo totus B A C toti BFC æqualis eſt: Eodem *c Per def.*
modo oſtendam B, & C æquales eſſe. Quod erat *35.*
primum. *d Per 27. l. 1.*

Quia verò jam oſtendi, triangula Q, R, quæ unum latus A F commune habent, etiam angulos lateri AF adjacentes habere æquales, nimirùm BAF ipſi CFA, & CAF ipſi BFA. Erunt *e* etiam latera AB ipſi FC, & BF ipſi CA, æqualia, itemque ipſa triangula. *e Per 26. lib. 1.*

Scholium.

P*artim ex hoc theoremate, partim ex definitione libro 2. præmittenda, facilè elicitur dimenſio parallelogrammi rectanguli. Illius area producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguorum AF, AC. Sit exem. gr. AF pedum 8. AC, 4. Duc 8. in 4. proveniunt 32. pedes quadrati pro area rectanguli.* *Fig. 60.*

Scholium.

Ex hoc theoremate habetur dimenſio parallelogrammi cujuſcunque. Illius igitur area producitur ex altitudine QX, ſeu CA ducta in baſim AB. Fig. 62.

Nam area rectanguli CB parallelogrammo BL æqualis fit f ex AC ducta in AB, Ergo &c. f Per ſchol. præced.

PROPOSITIO XXXVII. & XXXVIII.

Triangula (ACB, AFB) ſuper baſi eadem (AB), vel æquali inter eaſdem parallelas (CI, AZ) conſtituta ſunt æqualia. Fig. 63.

Lateribus AC, AF duc parallelas BL, BI. Parallelogramma ACLB, AFIB ſunt a æqualia. Sed horum triangula data b ſunt dimidia. Ergo triangula data c ſunt æqualia. a Per præc. b Per 34. l. 1. c Per ax. 6.

Hæc propoſitio fiet univerſalis. p. 1. l. 6. Idem hic tyrones notent in triangulis, quod eos notare juſſimus prop. præced. de parallelogrammis.

PROPOSITIO XXXIX. & XL.

Triangula æqualia (ACB, AFB) ſuper eadem baſi (AB), vel æquali ad eaſdem partes conſtituta ſunt inter eaſdem parallelas (AB, CF.) Fig. 64.

Si negas, ſit CL parallela ad AB, & ducatur BL. Igitur ALB æquatur a ACB. Sed ex hyp. etiam AFB ipſi ACB æquale eſt. Ergo ALB, & a Per præc.

AFB æqualia ſunt, pars, & totum. Quod fieri non poteſt. Igitur &c.

PROPOSITIO XLI.

Fig. 65. *SI triangulum (AFB) ſit in iiſdem parallelis cum parallelogrammo (AL) & baſim eandem habeat (AB) vel æqualem, ipſius dimidium erit.*

a Per 37. & 38. l. 1. b per. 34. lib. 1. Duc CB. Triangula AFB, & ACB *a* æquantur. Sed *b* ACB eſt dimidium parallelogrammi AL. Ergo etiam AFB eſt dimidium AL. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Fig. 65. *EX hac, & ex ſcholio prop. 35. diſcimus, aream trianguli (AFB) cujuſcunque produci ex dimidia altitudine (FI) ducta in baſim (AB), vel ex dimidia baſi in altitudinem. Quare noto uno latere trianguli, & altitudine, ſive perpendiculari, quæ in latus notum ex angulo oppoſito ducitur, habetur trianguli dimenſio: ut ſi baſis (AB) ſit pedum 100. altitudo (FI) 85. multiplica baſis dimidium 50. per 85. proveniunt 4250. pedes quadrati pro area trianguli (AFB). Porrò altitudo, ſive perpendicularis illa, quando area trianguli peragrari poteſt, mechanicè innoteſcit, uti latera. Si area peragrari nequeat, invenietur geometricè altitudo per 12. & 13. lib. 2. ut in ſcholio ibidem docebimus.*

In triangulo rectangulo altitudo eſt eadem cum alterutro latere circa angulum rectum. Hujus ergo ſemiſſis ducta in latus alterum recto adjacens dabit trianguli aream.

PRO-

PROPOSITIO XLII.

DAto triangulo (ACB) æquale parallelogrammum facere habens angulum parem dato (O.) Fig. 66.

Baſim AB biſeca in F. Per C duc CX parallelam AB *a*. Fac *b* angulum BAL parem dato O. Duc FI parallelam AL *c*. Erit ALIF, quod quæritur. *a Per 31. l. 1.* *b 23. l. 1.*

Ducatur enim FC. Parallelogrammum AI angulum habet LAF parem dato, O; & eſt æquale triangulo dato ACB, cum tam *d* triangulum ACB, quàm *e* parallelogrammum AI, dupla ſint ejuſdem trianguli ACF. *c Per 31 l. 1.* *d Per 38. l. 1.* *e Per præc.*

Corollarium.

DAto triangulo ACB habetur æquale rectangulum, ſi per C ducatur parallela lateri AB, & biſecta AB in F, ex B erigatur perpendicularis BQ. Erit enim rectangulum ſub FB, & QB par triangulo ACB. Fig. 66.

PROPOSITIO XLIII.

IN parallelogrammo (BL) complementa (BO, OL) eorum, quæ circa diametrum exiſtunt (RF, & CS) ſunt æqualia. Fig. 67.

Si per diametri AQ punctum quodvis O ducatur CF parallela lateri AB, & RS parallela lateri BQ, ſecatur totum BL in quatuor parallelogramma, quorum duo circa diametrum ſunt RF, CS, duo reliqua BO, OL ſunt horum complementa.

Ea eſſe æqualia ſic oſtenditur. Triangula ABQ, ALQ *f* æquantur, ſimiliter ARO, OCQ *g* æquantur *f Per 34. l. 1.* *g Per ean.*

tur AFO, OSQ. Ergo ſi ab æqualibus ABQ, ALQ auferas æqualia, hinc ARO, OCQ, inde AFO, OSQ æqualia remanent BO, & OL. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 68. *AD datam rectam (OS) parallelogrammum conſtituere dato triangulo (V) æquale in angulo dato (X.)*

f Per 42. l. 1. g Per 31. l. 1. Fac f parallelogrammum RC dato V æquale habens angulum ROC parem dato X, & pone latus RO in directum datæ OS. Per S duc SQ g parallelam OC, cui occurrat BC producta in Q. Per Q, & O ducta recta occurrat BR protractæ in A. Per A duc AL parallelam ad OS, cui occurrant CO, & QS productæ in F, & L. Parallelogrammum OL eſt, quod petitur.

i Per prec. k Per 15. l. 1. Nam OL i æquatur RC, hoc eſt per conſtructionem dato triangulo V, & eſt ad datam OS, habetque angulum k FOS parem angulo ROC, hoc eſt per conſt. parem dato X.

PROPOSITIO XLV.

Fig. 69. *DAto rectilineo (CBA) æquale parallelogrammum conſtruere ad datam rectam (IQ) & in dato angulo (H.)*

Rectilineum reſolve in triangula A, B, C ducendo rectas FL, FI.

Ad datam IQ in angulo dato H fac a parallelogram-

grammum IV æquale triangulo A. Tùm producatur IR infinitè verſus P: & ad rectam RV, in angulo, VRP fac *b* parallelogrammum RZ æquale trigono B. Rurſum ad rectam SZ in angulo ZSP fac parallelogrammum SG æquale trigono C. IG eſt parallelogrammum quæſitum. *a Per 44. l. 1.* *b Per ean.*

Nam *c* angulus ZVR par eſt ſibi alterno IRV. Sed *d* QVR, & IRV ſunt æquales duobus rectis.. Ergo etiam QVR, & ZVR duobus rectis æquantur. Ergo *f* QV & ZV ſunt in directum. Pari modo oſtendam QZ, & GZ eſſe in directum, Ergo tota QVZG eſt una recta, & quidem parallela ad IX, cùm per conſt. QV ſit ad IP parallela. Eſt verò etiam *g* XG parallela ad IQ, cùm XG ſit parallela ad SZ, & SZ ipſi RV, & RV ipſi IQ. *c Per 27. l. 1.* *Per eand.* *f Per 14. l. 1.* *c Per 30. l. 1.*

Ergo *h* IG eſt parallelogrammum eſſe autem æquale petitur patet ex conſtructione. *h Per def. 35.*

Scholium.

Adjungo problema utile futurum ad praxim propoſitionis 14. *l.* 2. *Fig. 70.*

Dato quadrangulo BF *rectangulum æquale deſcribere.*

Reſolve in triangula per rectam AC. Ex oppoſitis angulis demitte perpendiculares BO, FI. biſeca AC in S. Ex S erige perpendicularem SL parem duabus BO, FI. Rectangulum ſub LS, & SA æquatur dato BF. Demonſtratio patet ex 42.

PRO-

PROPOSITIO XLVI.

Fig. 71. *A data recta (AB) quadratum deſcribere.*

Erige duas perpendiculares æquales datæ AB nempe AC, BE, & junge CE. Dico factum.

a Per conſt. Cum enim anguli A, & B duo ſint *a* recti, erunt *b*
b Per 29. l. 1. AC, BE parallelæ: ſunt verò etiam *c* æquales: Er-
c Per conſt. go CE *d* AB ſunt parallelæ, & æquales. Ergo figura
d Per 33. l. 1. eſt parallelogramma, & æquilatera: anguli quoque omnes ſunt recti (cum enim A, & B ſint recti, et-
e Per 34. l. 1. iam recti *e* erunt oppoſiti E, & C.) Ergo figura AE eſt quadratum.

PROPOSITIO XLVII.

Fig. 72. *IN omni triangulo (ABC) rectangulo quadratum lateris (AC), quod recto angulo opponitur, æquale eſt duobus ſimul reliquorum laterum (AB, CB) quadratis.*

Ducantur IC, BF, & BE parallela AF. Si angulis IAB, FAC rectis, ac proinde æqualibus addatur communis BAC, erunt toti IAC, FAB æquales. Sunt verò in triangulis IAC, FAB etiam latera, quæ æquales illos angulos continent,
a Per defin. quadrati. inter ſe *a* æqualia, nempe IA, CA ipſis BA, FA alterum alteri. Ergo triangula
b Per 38. l. 1. IAC, FAB *b* æquantur; Quæ, quia cum parallelogrammis ABLI, & ZAFE conſiſtunt in iiſdem baſibus IA, FA, & in iiſdem parallelis IA,
c Per 41. l. 1. LBC, & AF, EZB ſunt *c* eorum dimidia. Ergo parallelogramma ABLI, ZAFE, utpote æqualium

lium dupla, erunt ęqualia inter ſe. Eodem diſcurſu ductis rectis AX, BR oſtendam parallelogramma EC, BX ęqualia eſſe. Totum igitur AR utriſque IB, & BX ęquale erit. Quod erat demonſtrandum.

Aſſumptum fuit LBC eſſe parallelam IA, adeòque LB, BC eſſe unam rectam. Id verò patet ex 14. cùm anguli LBA, & CBA ambo recti ſint per hypotheſim.

Scholium.

Hoc theorema (quod prop. 31. lib. 6. Euclides ad omnes figuras ſimiles extendet) Pythagoricum appellatur paſſim, ab inventore Pythagora, qui, ut teſtantur Proclus, Vitruvius, aliique, Muſis victimas immolavit, quod ſe in tàm præclaro invento ab iis adjutum putaret. Ignorabat videlicet ſcientiarum Dominum verum, & unicum omnis ſapientiæ auctorem Deum, aut certè, ſi cognovit, non ſicut Deum glorificavit. Frequens porrò hujus theorematis, & eximius per Mathematicam totam uſus eſt, ac viam in primis ad incommenſurabiles magnitudines arcanum ingens Geometricæ philoſophiæ, cognoſcendas aperit.

Quadrati latus eſſe diametro incommenſurabile, celebratiſſimum eſt apud veteres Philoſophos, Ariſtotelem præſertim, & Platonem, adeo ut qui hoc neſciret, eum Plato non hominem eſſe, ſed pecudem diceret. Notitia porrò hujus myſterii duxiſſe videtur originem ex hac prop. 47. Nam cum in quadrato angulus A rectus ſit, erit quadratum diametri CB æquale quadratis laterum AB, AC, ac proinde duplum unius. Quare cùm quadratum diametri CB ſit 2. & quadratum lateris AB ſit unitas, erit diameter CB radix quadrata 2., & latus AB radix quadrata unitatis, ſive ipſa unitas, qua- Fig. 71.

rum

rum proportio (ut ſuo loco demonſtrabitur) numeris explicari nequit, ac proinde incommenſurabiles ſunt.

Atque hoc vel unico argumento, tametſi cætera omnia deficerent, evidentiſſimè conficitur, magnitudines ex definito punctorum numero componi non poſſe; aliàs enim nullæ eſſent incommenſurabiles, omnium quippe menſura communis eſſet punctum.

His ſubjungo tria problemata ex eadem propoſitione deducta, quorum uſus frequentior.

Problema 1.

Fig. 73. *Datis quotcunque quadratis unum omnibus æquale conſtruere.*

Dentur quadrata tria, quorum latera ſint AB, BC, CE. *Fac angulum rectum* FBZ *infinita habentem latera, in eaque transfer* BA, *&* BC, *& junge* AC. *Erit ex* AC *quadratum æquale* a *quadratis* AB, BC. *Tùm* AC *transfer ex* B *in* X, *&* CE *tertium latus datum, transfer ex* B *in* E, *& junge* EX: *erit quadratum ex* EX *æquale* b *quadratis ex* EB (*ſeu* EC), *& ex* B X: *hoc eſt æquale tribus datis quadratis ex* AB, *ex* BC, *ex* CE.

a Per 47. l. 1.

b Per ean.

Problema 2.

Fig. 74. *Datis duabus rectis inæqualibus* AB, BC, *exhibere quadratum, quo quadratum majoris* AB *excedit quadratum minoris* BC.

Centro B *intervallo* BA *deſcribe circulum. Ex* C *erige perpendicularem* CE *occurrentem peripheriæ in* E. *Quadratum ex* CE *eſt exceſſus quæſitus.*

Ducatur enim BE, *quadratum* BE, *hoc eſt* AB

æqua-

æquatur c *quadrato* BC , *&* *quadrato* C. E : *Ergo &c.* c Per 47. l. 1.

Problema 3.

Notis duobus quibuſcunque lateribus trigoni rectanguli reliquum invenire. Fig. 76.

Latera rectum angulum ambientia ſint AC, AB, *hoc 6 pedum, illud 8. Oporteat invenire quot pedum ſit* CB *recto oppoſitum. Duc 6, & 8 in ſe ipſa, orientur laterum quadrata 36 & 64: quorum ſumma eſt 100. Radix quadrata 100. nempe 10 dat pedes lateris* BC *quæſiti. Demonſtr. patet ex 47. Nam ſumma quadratorum* BA, *&* AC *æquatur quadrato* BC. *Ergo horum ſummæ radix eadem eſt cum radice, ſeu latere* BC.

Nota ſint deinde latera AB, BC, *hoc 10 pedum illud 6. Oporteat invenire* AC. *Lateris* AB *quadratum 36. aufer ex 100. quadrato lateris* BC. *Reſiduum 64. erit quadratum lateris* AC. *Radix ergo 64. (nempe 8) dat pedes lateris* AC.

PROPOSITIO XLVIII.

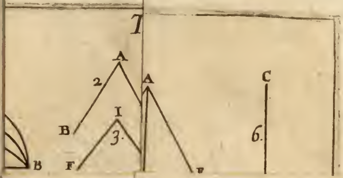
Si quadratum ab uno trianguli latere (AB) *deſcriptum ſit æquale duobus reliquorum laterum* (AC, BC) *quadratis; angulus* (ACB), *quem reliqua latera continent, rectus erit.* Fig. 76.

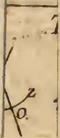
Si negas, erit angulus ACB recto major, aut minor. Ergo (vt demonſtrabitur prop. 12. & 13. lib. 2. quæ ab hac non dependent) quadratum AB non erit æquale quadratis AC, BC, contra hypotheſim.

Vel

Vel ſic. Duc F C perpendicularem ad A C
a Per 47. l. 1. æqualem CB, & junge AF. Quadratum A F æquale eſt *a* quadratis F C; CA, hoc eſt *b* quadratis
b Per conſtruct. BC, C A; hoc eſt per hyp. quadrato AB. Ergo rectæ A F, A B æquales ſunt. Quoniam igitur trigona X; Z ſunt ſibi mutuò æquilatera, anguli ad C *c* ſunt æquales. Ergo *d* recti. Quod erat demonſtrandum.
c Per 8. l. 1.
d Per def. 14.

AC
ua-
atis
rgo
tur
gu-
erai





ſigna-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ
LIBER SECUNDUS.

Hic Liber mole parvus, at præſtantia, ac utilitate theorematum planè magnus. Tyrones, ſcio, quod dico, nondum capient; ſed eſſe veriſſimum ulterius provecti, uſu ipſo certiſſimè intelligent.

DEFINITIO.

PArallelogrammum rectangulum (AE) (quod rectangulum ſimpliciter ſine ullo addito appellari ſolet) contineri dicitur ſub duabus lineis rectis (AC, AF) rectum angulum comprehendentibus. *Fig. 60. l. 1.*

Nam earum altera AC altitudinem rectanguli, altera AF latitudinem determinat. Deinde ſi intelligatur latus AC fieri perpendiculariter per totam AF, aut AF per totam AC, producetur eo motu area rectanguli. Quare merito rectangulum fieri dicitur ex ductu, ſeu multiplicatione duorum laterum contiguorum.

Quando igitur dicitur ex. gr. rectangulum ſub (vel ex) AC, CB, vel brevitatis cauſa, rectangulum ACB, deſignatur rectangulum, quod continetur ſub AC, & CB ad rectum angulum conſtitutis. Similiter, cùm dicitur rectangulum ſub AB, CB, vel rectangulum ABC, deſigna- *Fig. 2. l. 2.* *Fig. ead.*

ſignatur rectangulum contentum ſub rectis AB, & BC rectum angulum comprehendentibus.

Rectangulum porrò aliud eſt oblongum, aliud quadratum. Oblongum eſt, quod latera contigua habet inæqualia, ſive quod continetur ſub duabus rectis inæqualibus. Quadratum rectangulum eſt, quod ſub duabus æqualibus continetur.

N O T A.

Signum æqualitatis in hoc Libro eſt Æ.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. l. 2. *SI fuerint duæ rectæ (AB, AC) quarum altera ſecta ſit in quotcunque partes (AE, EF, FC) erit rectangulum ſub illis duabus (AB, AC), comprehenſum æquale rectangulis, quæ ſub inſecta (AB), & ſingulis ſectæ partibus (AE, EF, FC) continetur.*

Statue AB perpendicularem ad AC, per B duc infinitam BR perpendicularem ad AB. Ex E, F, C erige perpendiculares EI, FL, CQ. Erit BC rectangulum ſub AB, & AC, & eſt æquale rectangulis BE, IF, LC, hoc eſt (quia tàm IE, quàm LF ſunt *a* æquales AB) rectangulis ſub AB, AE, ſub AB, EF, ſub AB, FC.

a Per 39. & 34. l. 1.

Sholium.

DEcem prima hujus libri theoremata etiam vera ſunt in numeris, ſi, ut lineæ, dividantur in partes. Rectangula numerica procreantur ex multiplicatione duorum numerorum, quadrata verò numerica ex multiplicatione numeri per ſe ipſum.

PRO-

PROPOSITIO II.

SI recta (AB) ſecta ſit utcunque (in C), duo rectangula ſub tota (AB), & partibus (AC, CB) comprehenſa quadrato totius æqualia ſunt. Fig. 2.

Accipiatur F æqualis AB.
Rect. FAB Æ. *b* rect. FAC)
rect. FCB) *b Per* 1. *l.* 2.
hoc eſt, quia F, & A B ſunt æquales inter ſe.
Quad. ex AB Æ. rect. BAC)
rect. ABC)

PROPOSITIO III.

SIt recta (AB) utcunque ſecta (in C), erit rectangulum ſub tota (AB) & partium alterutra (BC) comprehenſum æquale rectangulo ſub partibus (AC, CB) una cum quadrato prædictæ partis (BC.) Fig. 3.

Aſſume F æqualem CB.
Rect. ABF Æ. *d* rect. ACF)
rect. CBF.) *d Per* 1. *l.* 2.
hoc eſt, quia æquales ſunt CB, & F.
Rect. ABC Æ. recta. ACB)
quad. CB.)

PROPOSITIO IV.

Fig. 4. *SIt recta (FL) utcunque ſecta (in O): erit quadratum totius æquale quadratis partium (FO, OL), & bis rectangulo ſub partibus (FO, OL) contento.*

e Per 2. l. 2. Quad. FL Æ. e rect. FL O cum rect. LFO.

f Per 3. l. Atqui rect. FLO Æ. f rect. FOL } quad. OL

& rect. LFO Æ. rect. LOF } quad. FO

g Per eand. Ergo quad. FL Æ. g rect. FOL } quad. OL } rect. FOL } quad. FO.

Id eſt quad. FL Æ. rect. FOL bis } quad. OL } quad. FO.

PROPOSITIO V.

Fig. 5. *SI recta (QX) ſecta fuerit æqualiter (in R), & inæqualiter (in S); erit rectangulum ſub inæqualibus partibus (QS, SX) contentum, unà cum quadrato partis intermediæ (RS) æquale quadrato dimidiæ (QR.)*

Per 1. l. 2. Rect. QSX b Æ. rect. QR, SX } rect. RSX.

Atqui

Atqui ob æqualitatem rectarum QR, RX.
Rect. QR, SX Æ. rect. RXS,

id eſt
c rect. RSX } quad. SX. e Per 3. l. 2.

Ergo rect. QSX Æ. rect. RSX, quad. SX, rect. RSX

Addatur utriſque quad. RS: habebitur

{ rect. QSX, quad. RS } Æ. { rect. RSX, quad. SX, rect. RSX, quad. RS } id eſt e quad. RX, ſeu QR. e Per 4. l. 2.

PROPOSITIO VI.

SI recta (AB) ſit bifariam ſecta (in C), eique recta quædam adjiciatur (BF): erit rectangulum ſub tota compoſita (AF), & adjecta (BF) contentum, unà cum quadrato dimidiæ (CB) æquale quadrato (CF) compoſitæ ex dimidia, & adjecta. Fig. 6.

Adde in directum LA æqualem adiectæ BF. Cùm æqualibus AC, BC æqualia addantur AL, BF, erunt totæ LC, FC æquales. Unde LF ſecta erit æqualiter in C, & inæqualiter in B.

Ergo { rect. LBF, cum quad. CB } Æ. d quad. CF d Per præc.

Sed ob æqualitatem rectarum LB, & AF
rect. LBF Æ. rect. AFB.

{ Ergo rect. AFB. quad. CB. } Æ. quad. CF

PROPOSITIO VII.

Fig. 7. *SI recta (AB) fuerit utcunque ſecta (in C), erunt quadrata totius (AB), & ſegmenti alterutrius (AC) æqualia bis rectangulo contento ſub tota (AB), & ſegmento dicto (AC) unà cum quadrato ſegmenti alterius (CB.)*

a Per 4.l.2. Quad. AB *a* Æ. rect. BCA bis
quad. AC
quad. BC.

Adde utriſque quad. AC. erunt

(Quad. AB Æ. rect. BCA bis
(quad. AC quad. AC bis
quad. BC

b Per 3.l.2. Atqui rect. BCA bis cum quadrato AC bis æquatur *b* rectangulo BAC bis. Quare ſi pro BCA bis, & quad. AC bis ſubſtituamus BAC bis; erit

(Quad. AB Æ. rect. BAC bis)
(quad. AC quad. BC.)

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8. *SI recta (LF) fuerit ſecta bifariam (I), eique quædam recta adjiciatur (FO), erit rectangulum (LIO), quod ſub (LI) dimidia, & (IO) compoſita ex dimidia, & adjecta continetur, quater ſumptum unà cum quadrato adjectæ (FO) æquale quadrato totius compoſitæ (LO.)*

Quad.

(Quad. IO *a* Æ. rect. OIF bis) *a Per præc.*
(quad. I F quad. FO)

hoc eſt, quia ex hyp. FI, LI, ſunt æquales; ac proinde quad. FI eſt quad. LI, & rect. OIF. eſt rect. OIL, ſeu LIO.

quad. IO Æ. rect. LIO bis)
quad. L I quad. FO)

Quare, ſi utriſque æqualibus addas rect. LIO bis. Erit

(quad. IO
quad. LI
(rect. LIO bis
id eſt

b quad. LO Æ. rect. LIO bis) *b Per 4. l. 2.*
quad. F O)
rect. LIO bis)
Id eſt
Æ. rect. LIO quater,)
& quad. F O.

PROPOSITIO IX.

SI recta (AC) ſit diviſa bifariam (in B), & non bifariam (in F): erunt quadrata partium inæqualium (AF, FC) dupla quadratorum dimidiæ (AB), & partis intermediæ (BF.) *Fig. 9.*

quad. AF Æ. *a* rect. ABF bis) *a Per 4. l. 2.*
quad. A B)
quad. BF.)

Addito igitur utriſque quad. FC

$$\left\{\begin{array}{l}\text{quad. AF}\\ \text{quad. FC}\end{array}\right. \text{Æ.} \left.\begin{array}{l}\text{rect. ABF bis}\\ \text{quad. AB}\\ \text{quad. BF}\\ \text{quad. FC.}\end{array}\right\}$$

Sed rect. ABF eſt rect. CBF, quia AB, BC ſunt æquales ex hyp.

Ergo $\left\{\begin{array}{l}\text{quad. AF}\\ \text{quad. FC}\end{array}\right. \text{Æ.} \left.\begin{array}{l}\text{rect. CBF bis}\\ \text{quad. AB}\\ \text{quad. BF}\\ \text{quad. FC}\end{array}\right\}$

b Per 7.l.2. Atqui b CBF bis cum quad. FC æquantur quadrata BC, BF, ſeu AB, BF : quare ſi hæc illis ſubſtituas, erunt.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{quad. AF}\\ \text{quad. FC}\end{array}\right. \text{Æ.} \left.\begin{array}{l}\text{quad. AB}\\ \text{quad. AB}\\ \text{quad. BF}\\ \text{quad. BF.}\end{array}\right\}$$

Id eſt

$$\left.\begin{array}{l}\text{quad. AB}\\ \text{quad. BF}\end{array}\right\} \text{bis.}$$

PROPOSITIO X.

Fig. 10. *SI recta (FI) ſit biſecta (in L), eique quædam recta adjiciatur (IO): erunt quadrata totius compoſitæ (FO), & adjectæ (IO) dupla quadratorum, quæ deſcribuntur ſuper dimidia (FL), & ſuper (LO) compoſita ex dimidia, & adjecta.*

Adjiciatur in directum QF æqualis IO. Quia ergo etiam FL, IL æquantur ex hyp. erunt totæ QL, OL æquales, ac proinde QO biſecta eſt in L, & aliter in I. Ergo.

quad.

{ quad. QI Æ. *a* quad. QL } bis *a Per præc.*
{ quad. IO   quad. LI }

Sed quad. QI eſt quad. FO, & quad. QL eſt quad. LO, & quad. LI eſt quad. FL.

Ergo (quad. FO Æ. quad. FL) bis
(quad. IO   quad. LO)

PROPOSITIO XI.

D*Atam rectam (AB) ita ſecare (in C), ut rectangulum (ABC) ſub tota, & una parte contentum, æquale ſit quadrato partis reliquæ (AC).* *Fig. 11.*

Ex A erige perpendicularem AF parem AB. AF biſeca in X. Duc rectam XB, cui ex FA producta æqualem abſcinde XI. Tùm abſcinde AC equalem AI. Dico factum.

Perficiatur quadratum BAFS, & ducta per C perpendiculari perficiatur quoque rectangulum FILO. Quoniam FA biſecta eſt in X, eique adjecta eſt AI. Erit

(rect. FIA Æ. *d* quad. XI. *d Per 6.l.2.*
(quad. XA

Id eſt

Æ. *e* quad. XB *e Per conſtr.*

Id eſt

Æ. *f* quad. BA *f Per 47. l.1.*
quad. XA).

Auferatur utrimque quad. XA. Erit rect. FIA, ſeu FL Æ. quad. BA; id eſt AS.

Quare ablato rursùm communi AO

Erit AL Æ. CS.

Atqui AL eſt quadratum AC, cùm AI, AC ex conſt. ſint æquales: & CS eſt rect. ABC, cùm BS ſit par AB. Ergo rectang. ABC æquatur quadrato AC. Datam igitur rectam ſecuimus, ut petebatur.

Scholium.

P*Ropoſitiones* 10. *primæ hujus libri veræ ſunt etiam in numeris. Hæc* 11. *numeris explicari non poteſt. Neque enim ullus numerus ita ſecari poteſt, ut productum ex toto in partem unam æquale ſit, quadrato partis reliquæ. Porrò mira vis eſt hujus ſectionis, de qua vide prop.* 30. *lib.* 6.

PROPOSITIO XII.

Fig. 12. I*N trigono obtuſangulo* (*ACB*) *quadratum lateris* (*AB*) *obtuſo angulo oppoſiti quadrata laterum reliquorum* (*AC, BC*) *excedit rectangulo* (*BCF*) *bis, quod comprehenditur ſub* (*BC*) *latere alterutro obtuſum angulum* (*ACB*) *continentium, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis* (*AF*), & *ſub* (*FC*) *intercepta exteriùs linea inter perpendicularem, & obtuſum angulum.*

a Per 47. *l.* 1. Quad. AB Æ. *a* quad. AF
quad. BF

b Per 4. *l.* 2. Sed quad. BF eſt *b* æquale quadratis FC, CB, & rect. BCF bis. Ergo, ſi hæc ſubſtituas pro quad. BF, erit

Quad.

Quad. AB Æ. quad. AF.)
quad. FC)
quad. CB)
rect. BCF bis)

Atqui quadrata AF, FC æquantur quadrato *c* AC. Quare hoc pro illis ſubſtituto erit *c Per 47. lib. 1.*

Quad. AB Æ. quad. AC)
quad. CB)
rect. BCF bis)

PROPOSITIO XIII.

IN triangulo quocunque (ACB) quadratum lateris (AB) acuto angulo (C) oppoſiti à quadratis laterum reliquorum (AC, BC) exceditur rectangulo (BCF) bis, quod continetur ſub (BC) latere alterutro acutum angulum (C) comprehendentium, in quod cadit perpendicularis (AF) ab oppoſito (A), & ſub (CF) intercepta inter perpendicularem (AF), & acutum angulum (C.) *Fig. 13.14.*

Quad. BC Æ. *a* rect. BFC bis) *a Per 4. l. 2.*
quad. BF)
quad. FC)

Et Quad. AC *b* Æ quad. FC *b Per 47. lib. 1.*
quad. AF

Quare duo (quad. BC. Æ. rect. BFC bis)
ſimul (quad. AC quad. BF)
quad. FC bis)
quad. AF.)

Atqui rectang. BFC bis cum quad. FC bis æquatur *c* rectangulo BCF bis; ergo hoc pro illis ſubſtituto. *c Per 3. l. 2.*

{ Quad. BC	Æ.	rect. BCF bis }
quad. A C		quadr. BF
		quad. AF. }

d Per 47. lib. 1. Atqui quadrata AF BF, ſunt *d* quad. AB. Ergo hoc pro illis ſubſtituto

{ Quad. BC	Æ.	rect. BCF bis }
quad. AC		quad. A B

Hoc eſt BC, AC quadrata, excedunt quad. AB rectangulo BCF bis.

Corollarium.

Fig. 15. Vera eſt propoſitio licet perpendicularis cadat extra triangulum. Demonſtratio ferè eadem eſt.

Scholium.

Ex hac, & 47. lib. 1. habetur dimenſio cujuſcunque trianguli, cujus tria latera ſint nota, licet aream habeat imperviam. Horum quippe theorematum beneficio innoteſcit perpendicularis, etiamſi eam impedimenta loci non ſinant deſignari. Perpendicularis autem multiplicata per ſemiſſem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, ut patet ex ſcholio propoſit. 41. lib. 1.

Fig. 13. vel 14. *Eſto trigonum quodcunque* A C B *nota habens latera. Oporteat notam reddere perpendicularem* AF *ex dato angulo* A *in latus oppoſitum* BC.

Quadratum lateris A B *acuto* C *oppoſiti aufer ex ſumma quadratorum* AC, CB. *Per 13. reſiduum erit rectangulum* B C F *bis. Reſidui ſemiſſem (hoc eſt rectangulum* B C F*) divide per notum latus* B C; *proveniet recta* C F. *Quadratum rectæ* C F *aufer ex quadrato* A C; *reſiduum dabit quadratum* b AF, *cujus radix quadra-*

b Per prob. 2. ſchol. poſt. 46. l. 1.

ta

ta dabit perpendicularem A F.

Obtinere idipſum poteris etiam ex p. 12. *Verùm* 13. *ſufficit, cùm in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppoſitum, intra triangulum cadat.*

PROPOSITIO XIV.

Dato rectilineo (QXZ) æquale quadratum conſtruere. Fig. 16.

Rectilineo QXZ fac æquale *a* parallelogrammum rectang. CI, cujus latera IA, CA ſi æqualia fuerint, ipſum erit quadratum, quod petitur; ſi inæqualia ſunt, latus majus IA produc in L, donec AL ſit par AC. IL biſeca in Z; quo centro per I, & per L deſcribe circulum, & producatur CA, donec circumferentiæ occurrat in B. Quadratum rectæ AB æquale eſt dato QXZ. *a Per* 45. *lib.* 1.

Ducatur enim recta ZB. Quoniam IL ſecta eſt bifariam in Z, & aliter in A, erit

{ rect. IAL. Æ. *a* quad. ZL: hoc eſt *a Per* 5. *l.* 2
{ quad. ZA

Æ. *b* quad ZB: hoc eſt *b Per conſt.*

Æ. *c* quad. ZA
quad. BA *c Per* 47. *l.* 1.

Ablato igitur utrimque quadrato ZA communi remanet,

rect. IAL Æ. quad. BA.

hoc eſt, quia AC, AL ſunt æquales, erit,

rect. CI Æ. quad. AB

Id eſt *d* rectil. QXZ. *d Per conſt.*

Scho-

Scholium.

CONſtructio Euclidæa requirit, ut per 45. l. 1. rectilineum reducatur ad rectangulum. Quæ reductio cùm ſatis operoſa ſit, fortaſſè expeditiùs problema abſolvetur hunc in modum.

a Per ſchol. p. 45. l. 1. *Rectilineum datum reſolvatur in tot quadrangula (Z, X), quot poteſt. Tùm ſingulis quadrangulis fac a rectangula æqualia.* f Per coroll. p. 42. l. 1. *Si tunc ſuperſit (ut hìc contingit) unum triangulum (Q), illi quoque fac f æquale rectangulum, ſingulis deinde rectangulis per hanc 14. fac quadrata æqualia: ac* g Per prob. 1. ſchol. p. 47. l. 1. *demùm his omnibus quadratis unum æquale g fiat. Erit hoc æquale dato QXZ.*

ELE-


A
F
4.
Q
L
7.
S
X
A
C
B
F
O
X

ſignatur rectangulum contentum ſub rectis AB, & BC rectum angulum comprehendentibus.

Rectangulum porrò aliud eſt oblongum, aliud quadratum. Oblongum eſt, quod latera contigua habet inæqualia, ſive quod continetur ſub duabus rectis inequalibus. Quadratum rectangulum eſt, quod ſub duabus æqualibus continetur.

N O T A.

Signum æqualitatis in hoc Libro eſt Æ.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. l. 2. *SI fuerint duæ rectæ (AB, AC) quarum altera ſecta ſit in quotcunque partes (AE, EF, FC) erit rectangulum ſub illis duabus (AB, AC), comprehenſum æquale rectangulis, quæ ſub inſecta (AB), & ſingulis ſectæ partibus (AE, EF, FC) continetur.*

Statue AB perpendicularem ad AC, per B duc infinitam BR perpendicularem ad AB. Ex E, F, C erige perpendiculares EI, FL, CQ. Erit BC rectangulum ſub AB, & AC, & eſt æquale rectangulis BE, IF, LC, hoc eſt (quia
a Per 39. & 34. l. 1. tam IE, quàm LF ſunt *a* æquales AB) rectangulis ſub AB, AE, ſub AB, EF, ſub AB, FC.

Sholium.

DEcem prima hujus libri theoremata etiam vera ſunt in numeris, ſi, ut lineæ, dividantur in partes. Rectangula numerica procreantur ex multiplicatione duorum numerorum, quadrata verò numerica ex multiplicatione numeri per ſe ipſum.

PRO-

PROPOSITIO II.

SI recta (AB) ſecta ſit utcunque (in C), duo rectangula ſub tota (AB), & partibus (AC, CB) comprehenſa quadrato totius æqualia ſunt. Fig. 2.

Accipiatur F æqualis AB.
Rect. FAB Æ. *b* rect. FAC)
rect. FCB) *b Per 1. l. 2.*
hoc eſt, quia F, & AB ſunt æquales inter ſe.
Quad. ex AB Æ. rect. BAC)
rect. ABC)

PROPOSITIO III.

SIt recta (AB) utcunque ſecta (in C), erit rectangulum ſub tota (AB) & partium alterutra (BC) comprehenſum æquale rectangulo ſub partibus (AC, CB) una cum quadrato prædictæ partis (BC.) Fig. 3.

Aſſume F æqualem CB.
Rect. ABF Æ. *d* rect. ACF) *d Per 1. l. 2.*
rect. CBF.)
hoc eſt, quia æquales ſunt CB, & F.
Rect. ABC Æ. recta. ACB)
quad. CB.)

PROPOSITIO IV.

Fig. 4. *Sit recta (FL) utcunque ſecta (in O): erit quadratum totius æquale quadratis partium (FO, OL), & bis rectangulo ſub partibus (FO, OL) contento.*

e Per 2. l. 2. Quad. FL Æ. e rect. FL O cum rect. L F O.

f Per 3. l. Atqui rect. F L O Æ. f rect. F O L } quad. O L

& rect. L F O Æ. rect. L O F } quad. F O

g Per eand. Ergo quad. F L Æ. g rect. F O L } quad. O L } rect. F O L } quad. F O.

Id eſt quad. F L Æ. rect. F O L bis } quad. O L } quad. F O.

PROPOSITIO V.

Fig. 5. *Si recta (QX) ſecta fuerit æqualiter (in R), & inæqualiter (in S); erit rectangulum ſub inæqualibus partibus (QS, SX) contentum, unà cum quadrato partis intermediæ (RS) æquale quadrato dimidiæ (QR.)*

Per 1. l. 2. Rect. QSX b Æ. rect. QR, SX } rect. RSX.

Atqui

Atqui ob æqualitatem rectarum QR, RX.
Rect. QR, SX Æ. rect. RXS,
id eſt
c rect. RSX } quad. SX.
c Per 3. l. 2.

Ergo rect. QSX Æ. rect. RSX
quad. SX
rect. RSX

Addatur utriſque quad. RS: habebitur
{ rect. QSX Æ. rect. RSX } id eſt
{ quad. RS quad. SX } e quad. RX,
rect. RSX } ſeu QR
quad. RS
e Per 4. l. 2.

PROPOSITIO VI.

Fig. 6.

SI recta (AB) ſit bifariam ſecta (in C), eique recta quædam adjiciatur (BF): erit rectangulum ſub tota compoſita (AF), & adjecta (BF) contentum, unà cum quadrato dimidiæ (CB) æquale quadrato (CF) compoſitæ ex dimidia, & adjecta.

Adde in directum LA æqualem adiectæ BF. Cùm æqualibus AC, BC æqualia addantur AL, BF, erunt totæ LC, FC æquales. Unde LF ſecta erit æqualiter in C, & inæqualiter in B.

Ergo { rect. LBF. Æ. d quad. CF
{ cum quad. CB
d Per præc.

Sed ob æqualitatem rectarum LB, & AF
rect. LBF Æ. rect. AFB.
{ Ergo rect. AFB. Æ. quad. CF
{ quad. CB.

PROPOSITIO VII.

Fig. 7. *SI recta (AB) fuerit utcunque ſecta (in C), erunt quadrata totius (AB), & ſegmenti alterutrius (AC) æqualia bis rectangulo contento ſub tota (AB), & ſegmento dicto (AC) unà cum quadrato ſegmenti alterius (CB.)*

a Per 4. l. 2. Quad. AB *a* Æ. rect. BCA bis
quad. AC
quad. BC.

Adde utriſque quad. AC. erunt

Quad. AB Æ. rect. BCA bis
quad. AC — quad. AC bis
quad. BC

b Per 3. l. 2. Atqui rect. BCA bis cum quadrato AC bis æquatur *b* rectangulo BAC bis. Quare ſi pro BCA bis, & quad. AC bis ſubſtituamus BAC bis; erit

Quad. AB Æ. rect. BAC bis
quad. AC — quad. BC.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8. *SI recta (LF) fuerit ſecta bifariam (I), eique quædam recta adjiciatur (FO), erit rectangulum (LIO), quod ſub (LI) dimidia, & (IO) compoſita ex dimidia, & adjecta continetur, quater ſumptum unà cum quadrato adjectæ (FO) æquale quadrato totius compoſitæ (LO.)*

Quad.

(Quad. IO *a* Æ. rect. OIF bis) *a Per præc.*
(quad. I F quad. FO)
hoc eſt, quia ex hyp. FI, LI, ſunt æquales; ac proindè quad. FI eſt quad. LI, & rect. OIF. eſt rect. OIL, ſeu LIO.

quad. IO Æ. rect. LIO bis)
quad. L I quad. FO)

Quare, ſi utriſque æqualibus addas rect. LIO bis. Erit

(quad. IO
quad. LI
(rect. LIO bis
id eſt
b quad. LO Æ. rect. LIO bis) *b Per 4. l. 2.*
quad. FO)
rect. LIO bis)
Id eſt
Æ. rect. LIO quater,)
& quad. FO.

PROPOSITIO IX.

SI recta (AC) ſit diviſa bifariam (in B), & non bifariam (in F): erunt quadrata partium inæqualium (AF, FC) dupla quadratorum dimidiæ (AB), & partis intermediæ (BF.) *Fig. 9.*

quad. AF Æ. *a* rect. ABF bis) *a Per 4. l. 2.*
quad. AB)
quad. BF.)
Addito igitur utriſque quad. FC

quad. AF Æ. rect. ABF bis
quad. FC quad. AB
quad. BF
quad. FC.

Sed rect. ABF eſt rect. CBF, quia AB, BC ſunt æquales ex hyp.

Ergo quad. AF Æ. rect. CBF bis
quad. FC quad. AB
quad. BF
quad. FC

b Per 7.l.2. Atqui *b* CBF bis cum quad. FC æquantur quadrata BC, BF, ſeu AB, BF : quare ſi hæc illis ſubſtituas, erunt.

quad. AF Æ. quad. AB
quad. FC quad. AB
quad. BF
quad. BF.
Id eſt
quad. AB
quad. BF } bis.

PROPOSITIO X.

Fig. 10. S*I recta (FI) ſit biſecta (in L), eique quædam recta adjiciatur (IO): erunt quadrata totius compoſitæ (FO), & adjectæ (IO) dupla quadratorum, quæ deſcribuntur ſuper dimidia (FL), & ſuper (LO) compoſita ex dimidia, & adjecta.*

Adjiciatur in directum QF æqualis IO. Quia ergo etiam FL, IL æquantur ex hyp. erunt totæ QL, OL æquales, ac proinde QO biſecta eſt in L, & aliter in I. Ergo.

quad.

{ quad. QI / quad. IO Æ. *a* quad. QL / quad. LI } bis — *a Per præc.*

Sed quad. QI eſt quad. FO, & quad. QL eſt quad. LO, & quad. LI eſt quad. FL.

Ergo (quad. FO / quad. IO Æ. quad. FL / quad. LO) bis

PROPOSITIO XI.

D*Atam rectam (AB) ita ſecare (in C), ut rectangulum (ABC) ſub tota, & una parte contentum, æquale ſit quadrato partis reliquæ (AC).* — *Fig. 11.*

Ex A erige perpendicularem AF parem AB. AF biſeca in X. Duc rectam XB, cui ex FA producta æqualem abſcinde XI. Tùm abſcinde AC equalem AI. Dico factum.

Perficiatur quadratum BAFS, & ducta per C perpendiculari perficiatur quoque rectangulum FILO. Quoniam FA biſecta eſt in X, eique adjecta eſt AI. Erit

(rect. FIA / quad. XA Æ. *d* quad. XI. — *d Per 6.l.2.*

Id eſt

Æ. *e* quad. XB — *e Per conſtr.*

Id eſt

Æ. *f* quad. BA / quad. XA). — *f Per 47. l.1.*

Auferatur utrimque quad. XA. Erit rect. FIA, ſeu FL Æ. quad. BA; id eſt AS.

Quare ablato rursùm communi AO

Erit AL Æ. CS.

Atqui AL eſt quadratum AC, cùm AI, AC ex conſt. ſint æquales: & CS eſt rect. ABC, cùm BS ſit par AB. Ergo rectang. ABC æquatur quadrato AC. Datam igitur rectam ſecuimus, ut petebatur.

Scholium.

Propoſitiones 10. *primæ hujus libri veræ ſunt etiam in numeris. Hæc* 11. *numeris explicari non poteſt. Neque enim ullus numerus ita ſecari poteſt, ut productum ex toto in partem unam æquale ſit, quadrato partis reliquæ. Porrò mira vis eſt hujus ſectionis, de qua vide prop.* 30. *lib.* 6.

PROPOSITIO XII.

Fig. 12. *In trigono obtuſangulo* (*ACB*) *quadratum lateris* (*AB*) *obtuſo angulo oppoſiti quadrata laterum reliquorum* (*AC, BC*) *excedit rectangulo* (*BCF*) *bis, quod comprehenditur ſub* (*BC*) *latere alterutro obtuſum angulum* (*ACB*) *continentium, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis* (*AF*), *& ſub* (*FC*) *intercepta exteriùs linea inter perpendicularem, & obtuſum angulum.*

a Per 47. *l.* 1. Quad. AB Æ. *a* quad. AF, quad. BF

b Per 4. *l.* 2. Sed quad. BF eſt *b* æquale quadratis FC, CB, & rect. BCF bis. Ergo, ſi hæc ſubſtituas pro quad. BF, erit

Quad.

Quad. AB Æ. quad. AF.
quad. FC
quad. CB
rect. BCF bis)

Atqui quadrata AF, FC æquantur quadrato *c* AC. Quare hoc pro illis ſubſtituto erit *c Per 47. lib. 1.*

Quad. AB Æ. quad. AC
quad. CB
rect. BCF bis)

PROPOSITIO XIII.

IN triangulo quocunque (ACB) quadratum lateris (AB) acuto angulo (C) oppoſiti à quadratis laterum reliquorum (AC, BC) exceditur rectangulo (BCF) bis, quod continetur ſub (BC) latere alterutro acutum angulum (C) comprehendentium, in quod cadit perpendicularis (AF) ab oppoſito (A), & ſub (CF) intercepta inter perpendicularem (AF), & acutum angulum (C.) *Fig. 13.14.*

Quad. BC Æ. *a* rect. BFC bis) *a Per 4. l. 2.*
quad. BF
quad. FC)

Et Quad. AC *b* Æ quad. FC *b Per 47.*
quad. AF *lib. 1.*

Quare duo (quad. BC. Æ. rect. BFC bis)
ſimul (quad. AC quad. BF)
quad. FC bis)
quad. AF.)

Atqui rectang. BFC bis cum quad. FC bis æquatur *c* rectangulo BCF bis; ergo hoc pro illis ſubſtituto. *c Per 3. l. 2.*

{ Quad. BC Æ. rect. BCF bis }
{ quad. A C quadr. BF }
quad. AF.

d Per 47. lib. 1. Atqui quadrata AF BF, ſunt *d* quad. AB. Ergo hoc pro illis ſubſtituto

{ Quad. BC Æ. rect. BCF bis }
{ quad. AC quad. A B }

Hoc eſt BC, AC quadrata, excedunt quad. AB rectangulo BCF bis.

Corollarium.

Fig. 15. VEra eſt propoſitio licet perpendicularis cadat extra triangulum. Demonſtratio ferè eadem eſt.

Scholium.

Ex hac, & 47. lib. 1. habetur dimenſio cujuſcunque trianguli, cujus tria latera ſint nota, licet aream habeat imperviam. Horum quippe theorematum beneficio innoteſcit perpendicularis, etiamſi eam impedimenta loci non ſinant deſignari. Perpendicularis autem multiplicata per ſemiſſem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, ut patet ex ſcholio propoſit. 41. lib. 1.

Fig. 13. vel 14. *Eſto trigonum quodcunque A C B nota habens latera. Oporteat notam reddere perpendicularem AF ex dato angulo A in latus oppoſitum BC.*

Quadratum lateris A B acuto C oppoſiti aufer ex ſumma quadratorum AC, CB. Per 13. reſiduum erit rectangulum BCF bis. Reſidui ſemiſſem (hoc eſt rectangulum BCF) divide per b Per prob. 2. ſchol. poſt. 46. l. 1. *notum latus B C; proveniet recta CF. Quadratum rectæ CF aufer ex quadrato A C; reſiduum dabit quadratum* b *AF, cujus radix quadra-*

ta

ta dabit perpendicularem A F.

Obtinere idipſum poteris etiam ex p. 12. Verùm 13. ſufficit, cùm in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppoſitum, intra triangulum cadat.

PROPOSITIO XIV.

D*Ato rectilineo (QXZ) æquale quadratum conſtruere.* *Fig. 16.*

Rectilineo QXZ fac æquale *a* parallelogrammum rectang. CI, cujus latera IA, CA ſi æqualia fuerint, ipſum erit quadratum, quod petitur; ſi inæqualia ſunt, latus majus IA produc in L, donec AL ſit par AC. IL biſeca in Z; quo centro per I, & per L deſcribe circulum, & producatur CA, donec circumferentiæ occurrat in B. Quadratum rectæ AB æquale eſt dato QXZ. *a Per 45. lib. 1.*

Ducatur enim recta Z B. Quoniam IL ſecta eſt bifariam in Z, & aliter in A, erit

{ rect. IAL. quad. ZA } Æ. *a* quad. ZL: hoc eſt *a Per 5. l. 2*

Æ. *b* quad ZB: hoc eſt *b Per conſt.*

Æ. *c* (quad. ZA quad. BA) *c Per 47. l. 1.*

Ablato igitur utrimque quadrato ZA communi remanet,

rect. IAL Æ. quad. BA.

hoc eſt, quia AC, AL ſunt æquales, erit.

rect. CI Æ. quad. AB

Id eſt *d* rectil. QXZ. *d Per conſt.*

Scho-

Scholium.

CONſtructio Euclidæa requirit, ut per 45. l. 1. rectilineum reducatur ad rectangulum. Quæ reductio cùm ſatis operoſa ſit, fortaſſè expeditiùs problema abſolvetur hunc in modum.

a Per ſchol. p. 45. l. 1. f Per coroll. p. 42. l. 1. *Rectilineum datum reſolvatur in tot quadrangula (Z, X), quot poteſt. Tùm ſingulis quadrangulis fac a rectangula æqualia. Si tunc ſuperſit (ut hic contingit) unum triangulum (Q), illi quoque fac f æquale rectangulum, ſingulis deinde rectangulis per hanc 14. fac quadrata æqualia: ac*

g Per prob. 1. ſchol. p. 47. l. 1. *demùm his omnibus quadratis unum æquale g fiat. Erit hoc æquale dato QXZ.*


A
F 4. O I
7.
S X A C B
F
O
X

a T
p. 4
f
voll
l. 1

g T
1.
47.



ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER III.

Perfectiſſimæ inter planas figuras proprietates fundamentales hoc libro demonſtrantur. Libri utilitas vel hoc ſolo innoteſcit, quòd tractet de circulo, rerum admirabilium per Matheſim univerſam fonte uberrimo. Theoremata illuſtriora ſunt 16. 20. 21. 22. 31. 32. 35. 36.

DEFINITIONES.

1 Circuli æquales ſunt, quorum diametri, ſeu ſemidiametri ſunt æquales.

2 Recta (FB) circulum tangere dicitur, quæ circulo ſic occurrit (in B), ut tamen producta circulum non ſecet. *Fig. 29. l. 3.*

3 Circuli tangere ſe dicuntur, cùm ſibi ſic occurrunt, ut tamen non ſeçent. *Fig. 13. & 14.*

4 In circulo æqualiter à centro (A) diſtare dicuntur rectæ (BC, FL), cùm perpendiculares (AI, AO), quæ ex centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. *Fig. 18.*

5 Segmenta, ſeu portiones circuli ſunt pártes, in quas circulum dividit recta (CE) circulum ſecans. *Fig. 37.*

6 Angulus in ſegmento eſt (BQC), qui continetur ſub rectis lineis, quæ ad unum circumferentię punctum *Fig. 33.*

punctum (Q) ex ſegmenti terminis (C B) ducuntur.

Fig. 33. 7 Angulus (CQB) inſiſtere dicitur peripheriæ (BOC), quæ illi opponitur.

Fig. 11. 8 Sector eſt pars circuli à duobus ſemidiametris (AB, AF), & arcu (BF, vel BQF), quem ſemidiametri intercipiunt, comprehenſa.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. *l.* 3. D*ati circuli centrum invenire.*

Ducatur in circulo recta BC utcunque, quam biſeca in Q. Per Q duc perpendicularem LF. Hanc biſeca in A. Erit A centrum.

Si negas; centrum eſto O extra rectam F L, (nam in FL eſſe non poterit, cùm ubilibet extra A dividatur inæqualiter) ducanturque BO, QO, CO. Quoniam igitur vis O centrum eſſe, erunt BO, CO æquales. Triangula igitur BOQ, COQ ſibi mutuò æquilatera ſunt, cum etiam ex conſtr. BQ, & QC ſint pares, & QO

a per 8. *l.* 1. *b per defin.* 14. *lib.* 1. communis. Ergo *a* angulus OQC æquatur angulo OQB. Ergo OQC *b* rectus eſt, ac proinde angulo LQC per conſtr. recto æquatur, pars toti. Quod eſt abſurdum.

Corollarium.

EX demonſtratis patet, ſi in circulo recta (LF) aliam (BC) bifariam, & perpendiculariter ſecat, in ſecante eſſe centrum.

Fig. 2. *Facillimè per normam invenitur centrum vertice Q ad circumferentiam applicato. Si enim recta DE jungentem puncta D, & E, in quibus normæ latera peripheriam ſecant, biſecetur in A, erit A centrum. Demonſtratio pendet ex* 31. *hujus.*

PRO-

PROPOSITIO II.

SI in circuli ambitu duo puncta ſumantur (B,C), recta, quæ per illa ducitur, intra circulum cadit. Fig. 2.

Accipiatur in recta BC quodvis punctum O, & ex centro A ducantur AO, AB, AC. Quoniam AB, AC æquantur, etiam *a* anguli B, & C æquales erunt. Quoniam igitur externus AOC *b* major eſt interno B, major erit quoque, quàm C. In triangulo igitur OAC latus AC ſubtendens majorem angulum AOC majus eſt *c* latere AO ſubtendente minorem C. Cùm igitur AC tantùm pertingat ex centro ad circumferentiam, AO non pertinget. Ergo punctum O intra circulum cadet. Idem oſtendetur de quovis alio puncto rectæ BC. Tota ergo BC cadit intra circulum. *a Per 5. l. 1.* *b Per coroll. 1. p. 32. l. 1.* *c Per 19. l. 1*

Ex ipſa etiam notione lineæ rectæ, & circularis propoſitio eſt manifeſta.

PROPOSITIO III.

SI in circulo recta per centrum ducta (BL) aliam (CF) non per centrum ductam ſecet bifariam, ſecabit quoque perpendiculariter. Et, ſi ſecet perpendiculariter, ſecabit bifariam. Fig. 3.

1 Pars. Ex A centro ducantur AC, AF. Triangula X, Z ſibi mutuò æquilatera ſunt; nam CO, FO ex hypoteſi, & AC, AF, quia ex centro, æquales ſunt; AO verò communis eſt. Ergo *f* anguli AOC, AOF æquales, *f Per 8. l. 1.*

i Per def. 14. l. 1. les. Ergo *i* recti. Quod erat primum.

2 Pars. Quia ex hyp. anguli AOC, AOF *o Per 47. l. 1.* ſunt recti, erit quad. AC *o* æquale quadratis AO, CO; & quad. AF æquale quadratis AO, FO. Cùm igitur quadrata AC, AF æqualia ſint, etiam duo ſimul AO, CO duobus ſimul AO, FO æqualia erunt. Quare ablato utrimque communi quadrato AO remanent CO, FO æqualia. Ac proinde etiam rectæ CO, FO ſunt æquales. Quod erat alterum.

PROPOSITIO IV.

Fig. 4. & 5. *SI in circulo duæ rectæ (BC, FL) non ambæ per centrum ductæ ſe ſecent, non ſecabunt ſe mutuò bifariam.*

Fig. 5. Nam ſi una LF tranſeat per centrum, patet, hanc non biſecari ab altera BC, quæ ex hyp. per centrum A non tranſit.

Fig. 4. Si neutra per centrum tranſit, ex A centro duc AO. Si jam ambæ BC, FL forent biſectæ *a Per præc.* in O, anguli quoque AOC, AOL eſſent *a* recti, ac proinde æquales, totum, & pars. Quod fieri non poteſt.

PROPOSITIO V. & VI.

Fig. 6. & 7. *CIrculi ſe mutuò ſecantes, aut interiùs tangentes non habent idem centrum.*

Aliàs enim ductis ex communi centro A rectis AB, ACF, eſſent AC, AF (pars, & totum) æquales, quia ambæ ſunt æquales eidem AB.

FRO-

PROPOSITIO VII.

SI in circulo quodvis aliud à centro (A) accipiatur punctum (C), ex quo rectæ plures CB, CL, CO, CF in circumferentiam cadant. Fig. 8.

1 *Maxima erit (CB), quæ per centrum tranſit.*
2 *Reliqua diametri pars (CF) minima.*
3 *Aliarum verò major eſt ea, quæ maximæ (CB) propior.*
4 *Neque plures, quàm duæ ex dicto puncto (C,) quod à centro diverſum eſt, ad circumferentiam duci poſſunt æquales.*

Pars I. Ducatur ex A centro recta AL. Quoniam AL, AB æquales ſunt, addita communi AC erunt LA cum AC, & BC æquales. Sed LA, AC ſunt majores *b* quàm LC. Ergo etiam BC major, quàm LC. Eodem modo BC oſtendetur major quavis alia. *b Per 20. l. 1.*

Pars 2. Ex centro duc AO rectam. AO (hoc eſt AF) eſt minor *c* quàm AC, CO. Ablata igitur communi AC remanet FC minor, quàm CO. Eodem modo erit CF minor quavis alia. *c Per eand.*

Pars 3. In triangulis COA, CLA latera LA, AC æquantur lateribus OA, AC; Angulus verò LAC major eſt angulo OAC. *c* Ergo baſis LC major baſi OC. *c Per 24. l. 1.*

Pars 4. Patet ex præcedentibus. Nam ſi tres duci poſſent æquales CO, CI, CQ, forent duæ CQ, CI ad eandem partem inter ſe æquales. Quod repugnat parti 3.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 9. & 10. *SI à puncto extra circulum accepto (A) ad circulum ducantur plures rectæ (AB, AC, AF) AO, AQ, AR.)*

1 *Earum, quæ in cavam peripheriam incidunt, maxima eſt (AB) tranſiens per centrum (Z.)*

2 *Aliarum major eſt ea, quæ maximæ (AB) propior.*

3 *Extra circulum minima eſt (AO), quæ producta per centrum tranſit.*

4 *Quæ minimæ propior, minor eſt remotiore.*

5 *Non plures, quàm duæ ex dicto puncto (A) in peripheriam duci poſſunt æquales, ſive intra circulum, ſive extra.*

Fig. 9. Pars 1. Ex centro Z duc Z C. Quia æquantur Z C, Z B; addita communi A Z, erunt A Z, Z C ipſi A B æquales. Sed A Z, Z C majores ſunt, *a* quàm A C. Ergo etiam A B major A C. Eodem modo erit A B major quavis alia.

a Per 20. l. 1.

Pars 2. Duc Z F. Latera C Z, Z A æquantur lateribus F Z, Z A Angulus verò C Z A major eſt angulo F Z A. Ergo *b* baſis C A major baſi F A.

b Per 24. l. 1.

Fig. 10. Pars 3. Duc Z Q. Duæ A Q, Q Z majores *c* ſunt, quàm A Z. Ablatis igitur æqualibus Z Q, Z O remanet A O minor, quàm A Q. Eodem modo A O minor erit quavis alia.

c Per 20. l. 1.

Pars 4. Duc Z R. Rectæ A Q, & Q Z minores ſunt *d* quàm A R, R Z. Ablatis ergo æqualibus Z Q, Z R remanet A Q minor, quàm A R

d Per 21. l. 1.

Pars

Pars 5. patet ex quatuor præced.

PROPOSITIO IX.

SI ab aliquo intra circulum puncto (A) plures quàm duæ æquales ad ambitum duci poſſint; id punctum centrum erit. Fig. 11.

Patet ex 4. part. prop. 7.

PROPOSITIO X.

CIrculi in duobus tantùm punctis ſe mutuò ſecant. Fig. 12.

Secent enim ſi fieri poteſt in pluribus B, C, F: Ex A centro circuli L Q. ducantur ad B, C F rectæ A B, A C; AF. Erunt hæ equales; Quoniam ergo ex aliquo intra circulum O S puncto A ductæ ſunt tres æquales ad ejus peripheriam A B, AC, AF erit A *f* centrum quoque circuli O S. *f* Per præc. Ergo circuli L Q, & O S ſe ſecantes habent idem centrum; quod repugnat propoſitioni 5.

PROPOSITIO XI.

SI duo circuli ſe intus tangant, recta per eorum centra (A, & I) ducta tranſibit per contactum (B.) Fig. 13.

Si negas, habeant, ſi fieri poteſt, centra eum ſitum, ut recta per illa tranſiens cadat extra contactum B ſecans circulos in O, & L,

 ſint-

ſintque centra ipſa A, & C. ac junge AB, CB. Quoniam igitur CB, CO æquantur, addita communi AC etiam A C, C B æquales erunt AO. Sed *b* A C, C B ſunt majores, quàm A B, hoc eſt *c* quàm AL. Ergo etiam AO major eſt quàm AL, pars toto. Quod eſt abſurdum.

b Per 20. l. 1.
c Per defin. circuli.

PROPOSITIO XII.

Fig. 14. **S**I *circuli ſe tangant exteriùs, recta conjungens centra per contactum tranſibit.*

Si negas, ſint, ſi fieri poteſt, centra ita poſita, puta in A, & B, ut recta per ipſa tranſiens per contactum S non incedat, ſed circulos ſecet in O, & Q, junganturque AS, BS. Erunt igitur *a* AS, SB majores quàm A B. Sed AS *b* eſt par AO, & BS par BQ. Ergo etiam AO, BQ ſunt majores, quàm tota AB, pars toto. Quod fieri non poteſt.

a Per 20. l. 1.
b Per defin. circuli.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 15. **C**Irculi *& ſeſe mutuò, & lineam rectam punctualiter tangunt.*

Tangant enim ſe intra (ſi fieri poteſt) duo circuli in parte circumferentiæ CL. Per centra A, & B ducta recta *b* tranſibit per contactum puta in C. Ducantur inſuper AL, BL. Quoniam igitur *c* BL, BC æquantur (ſunt enim ex centro B ad peripheriam OLC) addita communi AB, erunt AB, BL æquales AC. Sed AC eſt par AL, (ſunt enim ex centro A ad peripheriam QLC). Ergo etiam AB, BL ſunt equales AL, contra 20. lib. 1.

b Per 11. l. 3.
c Quia ex centro.

Tan-

Tangant ſe deinde exteriùs duo circuli, ſi fieri poteſt, in arcu OL. Recta AP centra A, & P jungens *d* tranſibit per contactum, puta in O. Ducantur inſuper AL, PL. Erunt igitur duo trianguli latera AL, PL æqualia ipſis AO, PO, ſeu toti AP, contra 20. lib. 1. *Fig.* 16. *d Per* 12. *l.* 3.

Denique recta BF, & circulus ſe tangant, ſi fieri poteſt, in parte aliqua CE. Ducantur ad centrum rectæ CA, EA. Erunt igitur CA, EA æquales, ac proinde triangulum CAE eſt iſoſceles; quare *e* anguli ACE, AEC acuti. Ergo perpendicularis ad BF ducta ex A centro cadet inter *f* C, & E, puta in D. Erunt igitur tàm AC, quàm AE æquales perpendiculari AD, quod eſt abſurdum, contra Coroll. 14. p. 32. l. 1. *Fig.* 16. *e Per coroll* 11. *p.* 32 *l.* 1. *f Per coroll.* 3. *p.* 32. *l.* 1.

Corollarium.

Circuli, qui habent centra in una recta, eamque ſecant in eodem puncto B, ſe mutuò in puncto illo B contingunt. *Fig.* 17.

Cæterùm hæc propoſitio liquet etiam ex notione ipſa linearum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea, & curva circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diverſæ curvaturę, aut duæ connexæ ſecundum ullam ſui partem poſſunt congruere. Congruerent autem, ſi invicem in tota parte aliqua tangerent.

PROPOSITIO XIV.

In circulo æquales rectæ (BC, LF) æqualiter à centro diſtant; &, quæ diſtant à centro æqualiter, ſunt æquales. *Fig.* 18.

Ex centro A ducãtur AC, AF, itẽ AO, AI ad an-

 gulos

a Per 3. l. 3. gulos rectos ipſis BC, FL. Erunt *a* BC, FL biſectæ in O, & I.

Cùm ergo totæ BC, FL ponantur æquales, etiam dimidiæ OC, IF, adeòque & quadrata ipſarum æquantur. Jam verò quad. AC *b* æquale eſt quadratis OC, OA, & quadratum AF æquatur quadratis IF, IA. Cùm igitur quadrata AC, AF æqualia ſint, etiam duo quadrata OC, OA duobus IF, IA æqualia erunt. Ablatis igitur quadratis OC, IF (quæ ante oſtenſa ſunt æqualia) quæ remanent, quad. OA, IA æqualia erunt. Ergo etiam perpendiculares OA, IA ſunt æquales. Ergo BC, FL æquales à centro diſtant *c* æqualiter. Quod erat primum.

b Per 47. l. 1.

c Per def. 4. l. 3.

E converſo ſi diſtantiæ OA, IA ponantur æquales, tunc ablatis quadratis rectarum æqualium OA, IA: Eodem diſcurſu oſtendetur, quadrata reliqua OC, IF fore æqualia, ac proinde & rectas OC, IF æquales eſſe, quæ cùm ſint *d* ſemiſſes rectarum BC, FL, etiam illæ æquales erunt. Quod erat alterum.

d Per 3. l. 3.

PROPOSITIO XV.

Fig. 19. R*Ectarum circulo inſcriptarum maxima eſt diameter; cæterarum ea major, quæ centro propior.*

Sit quævis RS alia à diametro FL. Ex centro duc AR, AS. Duæ AR, AS æquantur diametro FL, & ſunt *a* majores, quàm RS. Ergo &c.

a Per 20. l. 1.

Sit deinde BI propior centro, quàm XZ. Ex centro ad illas duc perpendiculares AC, AQ. Erit AQ *b* major, quàm AC. Accipe ergo AO pa-

b Per def. 4. l. 3.

parum AC, & per O duc RS perpendicularem ad AO, quæ *c* par erit BI, junganturque AR, AS, AX, AZ. Quia igitur A centrum eſt, erunt latera AR, AS æqualia lateribus AX, AZ. Angulus autem RAS major eſt angulo XAZ. Ergo baſis RS, hoc eſt BI major *d* eſt baſi XZ. Quod erat demonſtrandum. *c Per præc.* *d Per 24 l. 2.*

PROPOSITIO XVI.

R*Ecta (IF), quæ per (B) extremitatem diametri (CB) perpendicularis eſt, tota cadit extra circulum, cumque tangit (in B.) Neque inter ipſam, & circulum alia recta ad contactum (B) duci poteſt, quin circulum ſecet.* *Fig. 20.*

Pars 1. Accipiatur in recta IBF quodvis punctum L, ad quod ex centro A duc rectam AL. In trigono LAB, quoniam angulus ABL rectus eſt per hyp. erit ALB *a* acutus. Ergo AL oppoſita majori angulo ABL major eſt *b* quàm AB, quæ minori ALB opponitur. Sed AB tantùm pertingit ad circumferentiam. Ergo AL ultra circumferentiam porrigitur, ac proinde punctum L extra circulum eſt. Tota igitur IF extra circulum cadit. Quod erat primum. *a Per ſcor. 5. p. 32. l. 1.* *b Per 19. l. 1.*

Pars 2. Infra BF (ſi fieri poteſt) cadat RB tota extra circulum. Quoniam FBA rectus eſt per hyp. erit RBA acutus, ac proinde AB non eſt perpendicularis ad BR. Ducatur igitur ex A centro ad BR perpendicularis AO, quæ cadet *d* verſus R, & ſecabit circulum in Q. Igitur AB oppoſita majori angulo, nempe AOB recto major eſt, quàm AO, quæ oppinitur minori, nempe acuto OBA. Sed AB par eſt AQ. Ergo *d Per cor. 3. p. 32. l. 1*

 etiam

etiam A Q major eſt, quàm AO, pars toto.

Corollaria.

Fig. 20. 1 HInc rursùm patet, contactum rectæ lineę, & circularis eſſe punctualem.

Fig. 17. 2 Si centris in eadem linea recta in infinitum protracta acceptis deſcribantur per B infiniti circuli tàm minores primo B S C, quàm majores omnes tangent rectam IF in eodem uno puncto B.

3 Circuli igitur in amplitudinem quacunque data majorem excreſcentes propiùs ſemper, ac propiùs in infinitum tangenti appropinquant, nunquam tamen ei, præterquam in unico contactus puncto, conjunguntur, quod quamvis evidentiſſimum ſit, eſt tamen re vera admirabile.

Fig. 17. 4 Ex his manifeſtum eſt, lineam quamcunque in infinitum eſſe diviſibilem. Ducatur enim ab aliquo diametri puncto ad tangentem recta A Q. Infiniti circuli centra habentes in recta B A ſine termino productam rectam IF (per coroll. 2. hìc) & ſe mutuò (per coroll. p. 13.) tangunt in uno eodemque puncto B, ac proinde nuſquam vel inter ſe, vel cum recta I F conjunguntur præterquam in B. Ergo neceſſe eſt, ut rectam AQ dirimant in partes infinitas, hoc eſt in non tot, quin plures.

Fig. 20. 5 Angulum contingentiæ, ſeu contactus LBQ (eum nempe, qui tangente, & peripheria continetur) nulla recta linea poteſt dividere.

Fig. 17. 6 Per circumferentias tamen in eodem puncto tangentes ſecari poteſt, ac minui in infinitum. Atque in hoc, & tertio corollario latet totum myſterium aſymptoticum, hoc eſt lineæ rectæ ad Hyperbolam una ſecum in infinitum productam acce-

accedentis ad intervallum quocunque dato minus, nunquam tamen concurrentis, quod præclarè obſervavit, & demonſtravit Marius Bettinus noſter in Apiariis, & ante illum Barocius, atque Cardanus ex Rabbi Moyſe Narbonenſi, cujus demonſtrationem refert Cardanus de ſubtilitate lib. 16.

Scholium.

Demonſtratur, & ſolvitur fallacia paradoxorum, quæ ex angulo contactus deduci ſolent.

Atque hęc quidem ex 16. prop. hactenùs deducta & mira, & certa ſunt. Quę verò deduci ex eadem ſolent, prætereà, omnem captum humanæ mentis excedunt. Quare ſuſpicari aliquando cœpi latere hìc aliquid, cujus ignoratio ſubtilibus etiam ingeniis illuderet, & paradoxis illis immanibus aſſerendis anſam præberet. Et planè, quod ſuſpicatus ſum, ita ſe habere, mihi tandem videor deprehendiſſe. Paradoxa, quæ ex 16. inferri ſolent ex aliis multis, hęc ferè præcipua ſunt.

1 *Angulus contingentię (OAC) omni acuto minor eſt. Acutus eſto PAC, ab hoc auferri poteſt dimidius, & à reſiduo iterùm dimidius, & ſic deinceps ſine termino. Quo pacto acutus fiet quocunque dato minor; quantumvis tamen in infinitum minuatur, ſemper tamen reſidui anguli, exempli gr. anguli QAC, latus unum QA intra circulum cadet, ac proinde angulus contactus OAC intra acutum continebitur, ejuſque pars erit, ideoque illo minor.* Fig. 21. a Per 16. l. 3.

2 *Angulus ſemicirculi, licet recto minor ſit, eſt*

omni

omni acuto major. Quia ob eandem cauſam acutus quantumvis magnus B A Q intra ſemicirculi angulum BAO comprehenditur.

Hæc duo in ipſo textu propoſitionis inferuntur: Quamvis nonnulli dubitent, Euclidis ea ſint, an ab aliquo adjecta. Appollonius certè magnus geometra, cùm eandem affectionem in ellipſi, hyperbola, & parabola demonſtrat, has illationes prætermittit.

3 Angulus rectus CAB, (imò acutus quicunque CAQ) continet infinitos æquales angulos contactus, ac proinde infinities illo eſt major. Nam angulus CAB dividi poteſt in acutos infinitos minores ſemper, & minores, quorum nihilominus ſinguli ſunt majores b angulo contactus OAC.

b Per paradox. 1.

4 Angulus contactus CAO eſt vera pars anguli recti CAB; eundem quippe unà cum ſemicirculi angulo OAB conſtituit: nequit tamen ulla ſui multiplicatione ſuum totum adæquare; ac proinde hic infinita æqualia ſibi addita non efficiunt infinitum.

5 Tranſitur à minori ad majus, & per omnia media, neque tamen per æquale. Sive datur majus aliquo, & datur eodem minus, neque tamen datur eidem æquale. Nam ſi recta AB fixo manente puncto A moveatur, donec congruat cum tangente, deſcribet acutos angulos BAP, BAQ, & omnes alios poſſibiles, qui quamvis ſemper augeantur, ſemper tamen erunt minores c ſemicirculi angulo BAO; quamprimùm verò AB congruet tangenti C A, immediatè habetur rectus C A B major angulo ſemicirculi.

c Per paradox. 2.

Hęc, & plura alia ex hac 16. propoſitione deduci ſolent, quæ profectò, ſi ita, ut proponuntur, ſeſe habeant meritò incomprehenſibilia videri poſſent. Pelete-

letarius, ut his paradoxis ſe expediat, negat, angulum contactus eſſe quantum. Rem confecerat, ſi dixiſſet, nullum angulum eſſe quantum. Sed is vehementer errat, cùm inde infert, omnes ſemicirculi angulos eſſe æquales, quod planè non inferret, ſi intelligeret, quod de contactus angulo aſſeruerat, omnibus angulis convenire. Neque tamen Clavio noſtro in ſua illa adverſus Peletarium apologetica diſputatione aſſentior. Mea quidem ſententia uterque fallitur, hic dum omnes omninò angulos eſſe putat quantitatem, ille dum omnes, præter angulum contingentiæ. Alii, ſe, exiſtimant, hac una reſponſione omnes difficultates ſolvere, ſi dicant, curvilineos angulos, & rectilineos eſſe incomparabiles, rogati verò, cur ſint incomparabiles, reſpondent, quia angulus contactus quantumcunque multiplicatus nunquam poteſt æquare rectum, vel acutum.

Atqui hoc eſt paradoxum omnium maximum, cujus explicatio petebatur, qui nimirùm fieri poſſit, ut angulus contactus anguli recti pars ſit, & tamen quotieſcunque multiplicatus eumdem ſuperare nequeat. Reſpondent, angulum contactus non eſſe partem recti, quia eum non poteſt adæquare. At paradoxorum aſſertores replicant hinc ſolùm ſequi, non eſſe partem recti aliquotam, veram tamen eſſe partem, eo quòd cum ſemicirculi angulo rectum componat. Undè, qui hac via difficultates propoſitas volebant diſſolvere, debuerant oſtendere, angulum contactus nullo ſenſu partem eſſe rectilinei anguli, neque addito ſibi ſemicirculi angulo rectum componere: id quod facturi deinceps nos ſumus.

Mihi videtur res omnis ex Euclidæa definitione Def. 8. l. 1. anguli pendere. Hæc enim, ſi penitùs expendatur, manifeſtè docet, nullum angulum eſſe quantum, quo uno

erro-

errore ſublato, paradoxa omnia evaneſcunt. Sentio igitur.

1 Nullus angulus eſt quantitas, ſed modus quantitatis. Sic enim habet definitio 8.l.1. Angulus planus eſt duarum linearum &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non eſt quantitas, ſed modus quantitatis, cùm enim curvitas non ſit quantitas, cur inclinatio ſit, quę ab illa non magis differt, quàm inflexio, & fractio? Deinde. Si angulus eſſet quantus, foret vel linea, vel ſuperficies, vel corpus. Non eſſe lineam, aut corpus patet. Sed neque ſuperficies eſt, ea enim ablatione partium C, B,
Fig. 22. *minuitur, non angulus. Neque poteſt dici, angulum eſſe ſuperficiem indeterminatam, cùm angulus quilibet determinatus ſit.*

2 Quoniam anguli non ſunt quantitas, ſed modus quantitatis, eorum inter ſe comparatorum relatio non eſt ęqualitas, & inęqualitas, ſed ſimilitudo, & diſſimilitudo.

3 Cùm igitur anguli inter ſe comparati ęquales dicuntur, aut inęquales, non aliud intelligi poteſt, quàm eos ſimiles eſſe inter ſe, aut diſſimiles. Maluit tamen Euclides ęquales, & inęquales dicere ob multas horum terminorum in angulis rectilineis commoditates. Quem proinde loquendi modum etiam nos retinebimus.

4 Similes porrò anguli ſunt, quorum ambo latera ſuperimpoſita congruunt. Diſſimiles, quorum non congruunt latera. Angulus enim nihil eſt aliud, quàm inclinatio linearum alterius ad alteram. Ergo ſimiles anguli ſunt inclinationes linearum ſimiles. Non ſunt autem inclinationes linearum ſimiles, niſi ambæ ſibi mutuò impoſitæ congruant. Ergo ſimiles anguli ſunt, quorum congruunt latera,

diſſi-

diſſimiles quorum non congruunt.

5 Itaque manifeſtum eſt, nullum angulum curvilineum æqualem dari poſſe ulli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud eſt, quàm ſimilitudo (per concluſ. 2. & 3.) Similitudo angulorum eſt ſola laterum congruentia (per concluſ. 4.) Laterum congruentia haberi nequit, dum angulus curvilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Errat igitur Proclus, dùm deſcriptis æqualibus ſemicirculis ita ratiocinatur: Æqualium ſemicirculorum Anguli EAD, CAB æquales ſunt. Ergo ſi bis addatur communis angulus CAD, erit angulus EAC curvilineus æqualis rectilineo DAB. Fallit ne ergo axioma, ſi æqualibus addas, vel demas æqualia, tota, vel reliqua erunt æqualia? Nequaquam; hoc enim ad res quantas ſolùm pertinet; anguli porrò quanti non ſunt. Axioma, ut in angulis valeat, ita formari, ac intelligi debet. Similes anguli ſi apponantur ſimilibus angulis, ſimiliterque poſitis, qui tùm orientur, erunt ſimiles. At Proclus comparat angulos ſimiles quidem: ſed communis, qui utriſque additur, cùm ab una parte habeat latus rectum, ab altera curvum, diſſimiliter utriſque additur. Fig. 23.

6 Quare, cùm tota eſſentia anguli ſit linearum ſe tangentium inclinatio, non erit unus angulus pars alterius, una ſiquidem inclinatio pars alterius inclinationis non eſt; neque angulus auferri ab angulo poterit; inclinatio ſiquidem una auferri nequit ab altera, &c. Hæc enim non laterum inclinationibus, quæ quantitas non ſunt, ſed ſuperficiebus inter latera conſtitutis conveniunt.

7 Poſtremò ex jam dictis colligemus, quomodo intelligi debeant illæ locutionum formæ, quibus Geometræ paſſim, atq; ipſe in primis Euclides, utuntur,

cùm

cùm angulos ſecari, augeri, imminui, alterum alterius duplum, triplum, aliaque ſimilia aſſerunt. Hæc ſanè exiſtimabimus, eos non, propriè, ſed analogicè tantùm angulis tribuere; itaque eos loqui voluiſſe, quòd id commodius, & expeditius eſſet; neque tamen obnoxium periculo, modò in angulis rectilineis maneatur. Angulum itaque dividi rectâ D A, non aliud erit, quàm inter latera E A, C A aliam interponi lineam, quæ novas duas cum utroque latere inclinationes, hoc eſt duos novos angulos efficiat. Angulum verò E A C eſſe duplum anguli E A D, nihil rursùm aliud erit, quàm inter lineas rectas E A, C A aliam interponi, quæ ad utramque ſimiliter inclinetur, vnde fiat, ut rectę E A, D A rectis C A, D A inclinationibus non mutatis impoſitæ congruant. Quod ſi ita ratiocinentur: (Angulus E A D eſt æqualis angulo I L Q, & D A C eſt æqualis Q L R. Ergo totus E A C toti I L R æqualis eſt.) Idem erit, ac ſi dicatur: Inclinatio rectarum E A D ſimilis, ſeu eadem eſt inclinationi rectarum I L Q, & inclinatio rectarum D A C ſimilis eſt inclinationi rectarum Q L R. Ergo etiam inclinatio rectarum E A C ſimilis erit inclinationi rectarum I L R; vel certè (quod recidet in idem, ex aſſertione 4. ſuprà) collectionem illam ſic intellige. Latera E A D congruunt lateribus I L Q, & latera D A C congruunt lateribus Q L R. Ergo latera quoque E A C congruent lateribus I L R. Quæ quidem conſecutio ęquè clara eſt, atque ſi ęqualibus addas ęqualia, tota æqualia eſſe. Ad eum modum locutiones cęteras, quę, cùm ſint quantitatis propriæ, ad angulos transferuntur, facilè, veritate theorematum ubique ſalva, interpretabimur.

Fig. 24. (margin, beside "itaque dividi")
Fig. 24. & 25. (margin, beside "congruant")

His

His ita conſtitutis, facilè paradoxa angularia diſſolvemus, quę ſanè non aliunde enata ſunt, quàm quod angulos eodem, quo cæteras quantitates, habuerint loco, ut igitur ſimul omnia expediam, dico, paradoxa illa, ſi in proprio verborum ſenſu accipiantur, ad unum omnia eſſe falſa. Sic enim accepta non conveniunt niſi quanto; anguli autem quanti non ſunt, ut jam oſtendimus.

Itaque angulus contactus neque minor eſt quovis acuto, neque pars eſt anguli rectilinei, neque in rectilineo continetur infinities, imò ne ſemel quidem; nihil enim horum linearum inclinationi poteſt competere, quæ tota anguli eſſentia eſt. Si verò non propriè, ſed analogicè accipiantur, jam nihil continent, quod à communi ſenſu, ac ratione alienum ſit. Sic enim angulum contactus OAC eſſe minorem quo- Fig. 21. *vis acuto, & ſemicirculi angulum OAB acuto omni majorem, non aliud ſignificabit, quàm infra tangentem CA, nullam poſſe duci rectam ad contactum, quin ſecet peripheriam. Quę quidem circuli proprietas eſt omninò digna, quam homines admirentur, eſt tamen ejuſmodi quam poſſimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnans involvat. Non alius paradoxi tertii, quarti, & quinti ſenſus erit. Atque ita unius Euclidææ definitionis ductu, ritè perſpecta natura anguli, omnes immanium paradoxorum tenebræ evaneſcunt.*

PROPOSITIO XVII.

A Puncto dato (B) rectam ducere, quæ datum circulum (OQ) tangat. Fig. 26.

Ex A dati circuli centro ducatur ad datum punctum B recta AB ſecans peripheriam in O. Centro A deſcribe per B alium circulum BS, & ex O duc

OC

OC perpendicularem ad AB, quę occurrat circulo BS in C. Duc CA occurrentem circulo OQ in I: Ex B ad I ducta recta tanget circulum OQ.

Quia latera BA, IA æquantur lateribus CA, OA, anguluſque A communis eſt in trigonis

a Per 4. *l.* 2. IAB, OAC, etiam *a* anguli AOC, AIB æqua-
b Per conſt. les ſunt. Sed *b* AOC rectus eſt. Ergo etiam
c Per 16. *l.* 3. rectus eſt AIB. Ergo BI *c* tangit in I.

Scholium.

Fig. 27. *EX 31. ſequi pulchrè ex dato puncto (O) ducitur tangens circulum datum (BQ.)*

Centrum A, & datum punctum O jungens recta biſecetur in P. Tùm centro P per A, & O deſcribe circulum occurrentem dato in B: recta OB tanget.

Nam juncta AB angulus ABO in ſemicirculo rectus eſt per 31. ergo per 16. OB tangit circulum BQ.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 28. *SI circulum tangat recta linea (CL,) quæ ex centro (A) ad contactum (B) ducitur, tangenti perpendicularis eſt.*

Si negas, ſit ex A centro perpendicularis alia

a Per 1. par. *p.* 16. *l.* 3. quędam recta AF: *a* ſecabit ea circulum in O.
b Per cor. 5. *p.* 32. *l.* 1. Quia ergo angulus AFB rectus ponitur, erit *b* ABF acutus. Ergo AB, (hoc eſt AO) major
c Per 19. *l.* 1. *c* quàm AF, pars toto.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 29 *SI recta (BC) circulum tangat, & ex contactu (A) tangenti perpendicularis excitetur (AI), erit in ea centrum.*

Si negas, ſit centrum extra AI in Z, & ab eo

ad con-

ad contactum ducatur Z A, erit *d* angulus ZAC rectus, ac proinde par angulo IAC per hyp. recto, hoc eſt pars toti. *d Per præc*

PROPOSITIO XX.

AN*gulus ad centrum* (*BAC*) *duplus eſt anguli* (*BFC*) *ad peripheriam, cùm idem arcus* (*BC*) *eſt baſis angulorum.* *Fig. 30. 31. 32.*

Triplex eſt caſus. In primo latera B A, BF coincidunt. Tùm verò, quia A F, A C ex centro ductæ æquantur, erunt in triangulo Z anguli F, & C *a* æquales. Sed B A C *b* æqualis eſt duobus F, & C. Ergo B A C duplus eſt unius F. *Fig. 30.* *a Per 5. l. 1* *b Per 32. l. 1.*

In caſu ſecundo B A, C A cadunt intra BF, CF. Tùm verò ducta F A X per caſum primum X A B eſt duplus X F B, & X A C duplus X F C. Ergo totus B A C duplus eſt totius B F C. *Fig. 31.*

In tertio caſu BF ſecat A C, & anguli BAC, BFC ſunt extra invicem. Ducatur F A L per caſum 1. totus L A C duplus eſt totius L F C, & ablatus LAB duplus eſt ablati LFB. Ergo & reliquus B A C duplus eſt reliqui B F C. Quod erat demoſtrandum. *Fig. 32.*

PROPOSITIO XXI.

AN*guli* (*BQC, BFC*), *qui in circulo inſiſtunt eidem arcui* (*BOC*), *ſive qui in eodem ſegmento* (*BQFSC*) *exiſtunt, inter ſe omnes ſunt æquales.* *Fig. 33.*

Sit primò ſegmētū BQFSC majus ſemicirculo.

Ex centro A duc AB, AC. Per præced. angulus BAC ad centrum duplus eſt ſingulorum BQC, a Per ax.6 l. 1. BFC. Ergo omnes BQC, BFC ſunt *a* æquales. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 14. Sit deinde ſegmentum BQC æquale, aut minus ſemicirculo. In triangulis BQI, CFI, quia b Per 15. l. 1. anguli ad verticem I oppoſiti *b* æquales ſunt, etiam ſumma reliquorum Q, & R ſummæ reliquorum F, & O *c* æqualis erit. Quare ſi ab his c Per cor. 10. p. 32. l. 1. æqualibus ſummis auferantur anguli R, & O, qui per primam partem æquales ſunt, utpote eidem arcui QF inſiſtentes, qui remanent Q, F æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 35. *Quadrilateri circulo inſcripti (ABCF) oppoſiti anguli duos rectos conficiunt.*

Ducantur BF, CA. Angulus ABC cum duobus O, & X facit *a* duos rectos. Sed O eſt *b* æqualis I, quia inſiſtunt eidem arcui BC; & X *c* eſt æqualis Z, quia inſiſtunt eidem arcui AB. Ergo ABC cum duobus etiam I, Z, hoc eſt cum toto oppoſito angulo AFC facit duos rectos. Quod erat demonſtrandum.

a Per 32. l. 1. b Per 21 l. 3. c Per ean l.

PROPOSITIO XXIII, & XXIV.

Non ſunt neceſſariæ, & agitur de ſegmentis ſimilibus, quæ non poſſunt ſine proportionibus rectè definiri.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

D*Atum arcum* (*ABC*) *perficere.* Fig. 35.

Sub tendantur utcunque duæ rectæ AB, CB, quas biſeca in I, & L. Ex I, & L duc perpendiculares ſibi occurrentes in puncto O. Hoc erit centrum circuli, cujus portio eſt arcus A B C.

Nam *a* centrum eſt & in recta IX, & in recta LZ. Ergo in communi ipſis puncto O. *a Per cor. p. 1. l. 3.*

Praxis. Centro B ſumpto in arcu deſcribe circulum, eodemque intervallo, aliis in arcu centris, deſcribe duos alios circulos, quorum ſinguli priorem bis ſecent. Per interſectiones ductæ rectæ ſibi mutuò occurrentes in O dabunt centrum. Fig. 36.

PROPOSITIO XXVI, & XXVII.

I*N circulis æqualibus rectæ æquales* (*C E, FI*) *ſubtendunt arcus æquales; & ſi arcus ſunt æquales, etiam ſubtenſæ æquales erunt.* Fig. 37.

1 Pars. Ad centra A, & B ducantur CA, EA, FB, I B. Quia triangula C A E, FBI ſibi mutuò æquilatera ſunt, etiam erunt ſibi mutuò *c* æquiangula. Ergo cùm circuli ſibi mutuò imponentur, triangulum FBI congruere poterit triangulo C A E, ac proinde centrum B incidet in centrum A, & puncta F, I in puncta C E. Cùm igitur circuli ſint æquales, etiam arcus FLI neceſſariò congruet arcui C Q E, & arcus F O I arcui *c Per 8. l. 1.*

b Per axio. 7. l. 1. CSE, ac proinde æquales *b* erunt etiam ipſi.

Pars 2. Quoniam circulorum æqualium arcus FLI, CQE ponuntur æquales, ſibi mutuò impoſiti congruent, punctaque F, I incident in puncta C, E Ergo & ſubtenſa FI congruet ſubtenſæ CE. Ergo FI, CE *d* æquales ſunt. *d Per axio. 7. l. 1.*

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

Fig. 38. *SI in circulis æqualibus anguli ſive ad centra (BAC, FLI,) ſive ad ambitum (BOC, FSI) ſint æquales, etiam arcus (BXC, FZI) quibus inſiſtunt, ſunt æquales: & ſi arcus ſunt æquales, etiam anguli æquales erunt.*

Pars 1. Quoniam latera AB, AC æquantur LF, LI, (ſunt enim æqualium circulorum ſemidiametri) & anguli A, L ponuntur æquales, erunt *a Per 4. l. 1.* baſes *a* BC, FI æquales. Ergo arcus BXC, FZI *b Per præc.* etiam *b* æquales ſunt.

Ponantur jam anguli BOC, FSI ad ambitum *c Per 20. lib. 3* æquales. Quia igitur *c* horum dupli ſunt BAC, FLI, etiam illi æquales erunt, ac proinde, ut jam oſtenſum, etiam arcus BXC, FZI ſunt ęquales.

Pars 2. Ex æqualitate arcuum BXC, FZI habetur per 27. æqualitas ſubtenſarum BC, FI. Ergo, quia etiam BA, AC æquantur ipſi FL, LI *e Per 8. l. 1.* erunt *e* anguli A, & L ad centrum æquales: & *i Per 20. l. 3* quia *i* anguli O, & S horum dimidii ſunt, erunt etiam ipſi ęquales.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

D*Atum arcum (ABC) biſecare.* Fig. 39.

Duc AC, quam biſeca in O. Ex O perpendicularem duc OB occurrentem arcui in B. Dico factum.

Jungantur enim AB, CB. Latera AO, OB per conſtr. æquantur lateribus CO, OB, & anguli ad O ſunt æquales, quia recti. Ergo baſes AB, BC *a* æquales. Ergo etiam *b* æquantur arcus AB, CB. *a Per 4. l. 1. b Per 26. l. 3.*

Praxis. Centris A, & C deſcribe pari intervallo arcus ſe ſecantes in punctis F, & I, per quæ ducta recta arcum ABC biſecabit. Fig. 39.

PROPOSITIO XXXI.

A*Ngulus (BCF) in ſemicirculo rectus eſt: in ſegmento majore minor recto: in ſegmento minore recto major.* Fig. 40.

1 Pars. Ex centro A duc AC. Quia æquales ſunt AB, AC, anguli O, B *a* æquales erunt. Ob eandem cauſam æquales erunt I, F. Ergo totus BCF utrique B, & F æqualis eſt. Cùm igitur *b* tres ſimul conficiant duos rectos, ſemiſſis trium, angulus BCF, unus rectus eſt. *a Per 5. l. 1 b Per 32. l. 1.*

2 Pars. Sit ſegmentum LOBF ſemicirculo LOB majus, in eoque FOL angulus, & ducatur OB. Angulus FOL minor eſt angulo BOL, qui per 1. partem rectus eſt. Ergo &c. Fig. 41.

3 Pars. Eſto ſegmentum LOX ſemicirculo Fig. 41.

LOB minus, in eoque angulus XOL. erit hic majus, quàm BOL, qui rectus eſt. Ergo &c.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 42. & 43. *SI recta (CF) circulum tangat, & alia ex contactu ducta (AB) eundem ſecet, erit angulus à tangente, & ſecante factus par angulo, qui fit in ſegmento alterno.*

Nimirùm angulus CAB erit par angulo L, qui fit in ſegmento ALQB; & angulus FAB par angulo O, qui fit in ſegmento AOB.

Fig. 42. Tranſeat primò ſecans AB per centrum. Per 18. CAB rectus eſt. Et per 31. rectus eſt L. Ergo CAB, & L æquales ſunt.

Fig. 43. Tranſeat deinde ſecans AB non per centrum Ducatur igitur per centrum recta AQ, & jungatur BQ. Quia ABQ in ſemicirculo rectus
a Per 32. l. 1. eſt, faciet BQA cum BAQ *a* rectum unum. Sed etiam CAQ rectus *b* eſt. Ergo BQA cum
b Per 18. lib. 3. BAQ æquatur CAQ. Ablato igitur communi BAQ erit BQA (hoc *c* eſt L) æqualis CAB.
c Per 21. l. 3. Quod erat primum.
d Per 13. l. 1. Deinde, *d* FAB, CAB faciunt duos rectos; & in quadrilatero BOAL *e* oppoſiti L, & O
e Per 22. l. 3. etiam faciunt duos rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus ſimul O, & L. Ablatis ergo hinc quidem CAB, inde L, quos jam oſtendi æquales, erunt æquales reliqui FAB, & O. Quod erat alterum.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta (BC) ſegmentum circuli conſtruere capiens angulum dato parem. Fig. 44.

Si detur angulus acutus ABF, ex B duc BL perpendicularem ad AB, & ad terminum C datæ rectæ BC fac angulo CBL parem *a* BCI, cujus latus ſecabit BL in I. Centro I per B deſcribe circulum, hic tranſibit per C (quia ob æqualitatem angulorum ad C, & B etiam latera CI, BI *b* æqualia ſunt), capietque ſegmentum BQC angulum parem dato ABF. *a Per 23. l. 1.* *b Per 4. l. l. 1.*

Nam, quia AB diametro BL perpendicularis eſt, AB tanget *d* circulum, quem ſecat BC. Ergo *e* angulus in ſegmento BQC æquatur angulo ABF. *d Per 18. l. 3.* *e Per præc.*

Quòd ſi detur angulus obtuſus RBC; eadem conſtrue, eritque ſegmentum COB quæſitum.

PROPOSITIO XXXIV.

A Dato circulo ſegmentum auferre capiens angulum dato parem. Fig. 45.

Ad circuli diametrum FA duc perpendicularem BAL, ducatur item AC, *f* quæ faciat angulum BAC parem dato. Hæc auferet ſegmentum AQC capiens angulum parem dato, uti patet ex 32. *f Per 23. l. 1.*

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 46. 47. 48. *SI in circulo duæ rectæ (CL, BF) ſe ſecuerint, rectangulum (COL) ſub ſegmentis unius æquale eſt rectangulo (BOF) ſub ſegmentis alterius comprehenſo.*

Fig. 46. Si ſe interſecant in centro A, res patet.

Si una CL tranſit per centrum A, & reliquam BF ſecat bifariam, ſecabit quoque *a* perpendiculariter, ac proinde quad. FO eſt rectangulum FOB. Ducatur AF. Quoniam CL biſecta eſt in A, & aliter in O, erit

a Per 3. *l.* 3.

b Per 5. *l.* 2.

c Per 47. *l.* 1.

{ rect. COL Æ. *b* quad. AL : hoc eſt
{ quad. AO

quad. AF : hoc eſt *c*
{ quad. AO
{ quad. FO

Dempto igitur communi quadrato AO erit rect.

COL Æ. quad. FO : hoc eſt
rect. FOB.

Fig. 47. Si una CL per centrum tranſit, & reliquam BF ſecat inæqualiter in O, ex centro A ducta recta ſecet ipſam BF in R bifariam. Igitur angulus ARB *d* rectus erit. Jam, quia CL biſecta eſt in A, & aliter in O, erit

d Per 3. *l.* 3.

e Per 5. *l.* 2.

f Per 47. *l.* 1.

{ rect. COL Æ. *e* quad. AL : hoc eſt
{ cum quad. AO

quad. AB : hoc eſt *f*
{ quad. AR
{ quad. BR

Sed

Sed quadratum AO æquatur *g* quadratis OR, AR. Ergo *g Per eãd.*

rectang. COL Æ. quad. AR
quad. OR quad. BR.
quad. AR

Dempto igitur communi quadr. AR remanent

rect. COL Æ. quad. BR
quad. OR

Atqui etiam quadratum BR æquatur rectangulo *i* FOB cum quadrato OR, quia FB ſecta eſt bifariam in R, & aliter in O. Ergo *i Per 5.l.2.*

rect. COL Æ. rect. FOB
quad. OR quad. OR

Dempto igitur communi quadrato OR, erit
rect. COL Æ. rect. FOB.

Quòd ſi neutra rectarum CL, FB per centrum tranſeat, per communem earum ſectionem O per centrum A ducatur recta XZ. Per modò demonſtrata tàm rect. COL, quàm rectang. FOB æquantur rectangulo ZOX. Ergo etiam COL, FOB æqualia ſunt inter ſe. *Fig. 48.*

PROPOSITIO XXXVI.

SI à puncto (B) extra circulum dato ducantur duæ rectæ, una tangens (BF), altera ſecans (BC), erit rectangulum (CBO) ſub tota ſecante (CB), & parte (BO) inter punctum, & circulum interjecta comprehenſum æquale quadrato tangentis (BF.) *Fig. 49. 50. 51.*

Si ſecans BC tranſit per centrum A, junge AF, faciet hęc *a* cum FB angulum rectum. Quoniam *Fig. 49.* *a Per 18. l. 3.*

CO

b Per 6. l. 2. C O biſecta eſt in A, eique adjecta O B, erit

c Per 47. l. 1. { rect. C B O *b* Æ quad. A B *c*
quad. A O. hoc eſt.
quad. B F }
quad. A F }

Ablatis ergo quadratis A O, A F æqualibus remanet

rect. C B O Æ. quad. B F.

Fig. 50. 51. Quòd ſi C B non tranſit per centrum A, ducantur A B, A F, A O, & A L ex centro ducta biſecet O C in L. Ergo angulus A L O *d* rectus erit. Item A F B *e* erit rectus. Quoniam verò C O biſecta eſt in L, eique adjecta eſt O B, erit

d Per 3l. 3.

e Per 18. l. 3.

f Per 6. l. 3. { rect. C B O. }
quad. L O } Æ. *f* quad. L B.

Addatur utrimque quadratum A L, erit

(rect. C B O Æ. quad. L B }
quad L O quad. A L }
quad A L

Sed quadrata L O, A L æquantur quadrato *g* A O, ſeu A F; & quadrata L B, A L *i* æquantur quadrato A B. Ergo

g Per 47. l. 1.

i Per eand. { rect. C B O Æ quad. A B
quad. A F hoc eſt *K*

K. Per ean. quad. B F }
quad. A F }

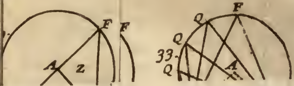
Ablato igitur communi quadrato A F, remanet
rect. C B O Æ. quad. B F.

Corollaria.

Fig. 52. 1 SI ab eodem extra circulum punctoB, quotvis ducantur ſecantes B C, omnia rectangula


D
A
5.
L
A

Ta



gula CBO inter ſe æqualia ſunt. Singula enim æquantur quadrato tangentis BF.

2 Quæ ex eodem puncto circulum tangunt BF, BQ æquales ſunt, earum quippe quadrata æquantur ſingula eidem rectangulo CBO.

PROPOSITIO XXXVII.

SI rectangulum ſub CB, & OB ſit æquale quadrato BF, hæc circulum tanget in F. *Fig. 52.*

Ex B ducatur tangens BQ, & ex centro ductis ad Q, & F rectis EQ, EF jungantur BE. Quoniam rectangulo CBO æquantur quadratum BF per hyp. & quadratum BQ per 36. hæc inter ſe æqualia ſunt, adeoque & rectæ BQ, BF æquales. Igitur triangula FEB, QEB ſibi mutuò ſunt æquilatera. Ergo *b* anguli Q, F æquales erunt. Sed Q *c* rectus eſt. Ergo etiam F rectus eſt. Ergo BF *d* tangit.

b Per 8. *l.* 1.
c Per 18. *l.* 3.
d Per 16. *l.* 3.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER IV.

Hic liber totus Problematicus eſt. Docet, quo artificio figuræ præſertim ordinatæ circulo inſcribantur, & circumſcribantur. Ampliſſimus eſt illius uſus in munitionibus extruendis, & ex illo quaſi fonte eximiæ illæ ſinuum, tangentium, & ſecantium tabulæ ingenti bono Matheſeos fluxere.

DEFINITIONES.

1 Figura rectilinea circulo inſcripta eſt, vel circulus figurę circumſcriptus, cùm ſingulorum angulorum vertices in circumferentia exiſtunt.

2 Figura rectilinea circulo circumſcripta eſt, vel circulus figuræ inſcriptus eſt, cùm ſingula latera circulum tangunt.

3 Figura ordinata, ſeu regularis eſt, quæ æquilatera, & æquiangula eſt.

PROPOSITIO I.

Fig. 1. l. 4. *Circulo (BD) rectam datam (A) diametro non majorem inſcribere.*

Accipe in peripheria quodvis punctũ B. Cẽtro

B in-

B intervallo datę A deſcribe arcum circulo occurrentem in C. Duc rectam B C. Dico factum.

PROPOSITIO II.

Circulo triangulum inſcribere dato (X) æquiangulum. Fig. 2.

Circulum tangat E F in D. Fiat angulus EDG par *a* angulo C. & F D H par B. junganturque G H. Dico factum. Nam angulus H æquatur *b* angulo E D G: hoc eſt *c* angulo C, & G æquatur *d* F DH, hoc eſt *e* ipſi B. Ergo etiam G D H *f* æquatur A. Factum eſt igitur, quod petebatur.

a Per 23. *l*. 1.
b Per 32. *l*. 3.
c Per conſt.
d Per 32. *l*. 3
e Per conſt.
f Per coroll. 9. *p*. 32. *l*. 1.

PROPOSITIO III.

Circulo circumſcribere triangulum æquiangulum dato I L K. Fig. 3.

Latus Ik utrimque producatur, ut fiant externi anguli O, & N. Fac in centro A per 23, lib. 1. angulos G A B, BAF pares angulis O, N. Deinde in punctis G, B, F circulum tangant tres rectæ coeuntes in C, E, D. Triangulum CDE eſt circulo circumſcriptum, & æquiangulum dato I L k.

In quadrilatero CGAB anguli G, & B ſunt duo *a* recti. Ergo reliqui GAB, & C conficiunt ſimul etiam duos *b* rectos, ac proinde æquantur duobus ſimul O, I. Ablatis igitur GAB, & O æqualibus per conſtr. remanent ęquales C, & I. Eodem modo oſtenditur E ęqualis eſſe k. Ergo D, & L *c* etiam ęquales erunt. Factum eſt igitur, quod petebatur.

a Per 22. *l*. 3.
b Per theor. 1. ſchol. poſt. 32. *l*. 1.
c Per corol. 9. *p*. 32. *l*. 1.

Quod

Quòd autem tangentes concurrant, ſic oſten-
e Per 13. l. 1. ditur. Anguli O, I, & k, N ſunt æquales *e* 4. rectis. I, k ſunt minores duobus *f* rectis. Ergo
f Per 32. l. 1. O, N (hoc eſt per conſtruct. G A B, & B A F) ſunt majores duobus rectis. Ergo G A F eſt minor duobus *g* rectis. Ergo recta G F cadit in-
g Per cor. 3. p. 13. l. 1. ter A, & D. Ergo cùm A G D, A F D ſint recti, erunt D G F, D F G duobus rectis minores.
i Per ſchol. poſt. 31. l. 1. Ergo *i* C G D, E F D concurrunt verſus D. Simili ratione demonſtrabis concurrere reliquas.

PROPOSITIO IV.

Fig. 3. T*Riangulo circulum inſcribere.*

Duos angulos C, & E biſeca rectis C A, E A coeuntibus in A. Ex A duc perpendiculares A B, A G, A F. Circulus centro A per B deſcriptus tranſibit etiam per G, & F, tangetque tria latera trianguli.

In triangulis enim C A G, & C A B, quia anguli A G C, A B C, itemque G C A, B C A per conſt. æquantur, & latus quoque A C eſt com-
a Per 26. l. 1. mune, etiam A G, A B *a* æqualia erunt. Pari modo oſtendam, paria eſſe A B, A F. Circulus ergo deſcriptus centro A tranſit per B, G, F; &
b Per 16. lib. 3. quia anguli ad B, G, F ſunt recti, tangit *b* omnia trianguli latera. Fecimus ergo, quod petebatur.

PROPOSITIO V.

Fig. 4. T*Riangulo circulum circumſcribere: ſive per tria data puncta (B, C, D) non ad unam rectam poſita circulum deſcribere.*

Puncta data B, C, D binis rectis B C, C D con-
necte

necte, quas biſeca perpendicularibus O A, E A concurrentibus in A. Hoc erit centrum circuli per B, C, D tranſeuntis.

Ductæ intelligantur rectæ A C, A D, A B. Per conſt. latera D O, A O æquantur lateribus OC, O A, & anguli ad O ſunt recti. Ergo A D *a* æquatur A C. Eodem modo A B æquatur AC. Ergo etiam A D, A B *b* æquales. Ergo circulus centro A deſcriptus per B tranſibit etiam per C, & D. Quod petebatur. *a Per 4. l. 1.* *b Per ax. 1. l. 1.*

Ad praxim tantum opus eſt, centris B, C, D deſcribere tres æquales circulos ſe mutuò interſecantes; & per interſectiones ducere rectas, hæ ſibi occurrentes dabunt centrum quæſitum.

PROPOSITIO VI. & VII.

Circulo quadratum inſcribere, & circumſcribere. *Fig. 5.*

Ducantur diametri BD, CE ſe mutuò ſecantes perpendiculariter: rectæ, quæ harum terminos jungunt, circulo quadratum inſcribunt.

Demonſtratio patet ex 4. l. 1. & ex 31. l. 3. Ducantur deinde quatuor tangentes circulum in B, C, D, E concurrentes in I, F, G, H. Figura IFGH quadratum eſt circulo circumſcriptum.

Demonſtratio patet ex 18. l. 3. ex coroll. 2. p. 36. l. 3. ex 28. & 34. l. 1.

Scholium.

Quadratum circumſcriptum circulo duplum eſt inſcripti. Nam, quia angulus B C D in ſemicirculo rectus d eſt, erit quadratum ex D B (hoc eſt quadra- *Fig. 5.* *d Per 31. l. 3.*

a Per 47. *quadratum F I) æquale quadratis c DC, BC, proinde duplum quadrati DC, hoc eſt quadrati C D E B.*

PROPOSITIO VIII. & IX.

Fig. 6. Q*Uadrato (B E F C) circulum inſcribere, & circumſcribere.*

Ducantur diametri in quadrato ſe ſecantes in A. Centro A per B deſcriptus circulus tranſibit etiam per E, F, C.

Deinde ex A duc A D perpendicularem ad C B. Centro A per D deſcriptus circulus tanget omnia quadrati latera.

Pars 1. Quia ex hyp. C B, E B latera ſunt æqualia, erunt anguli B C E, B E C *a* æquales. Angulus autem C B E rectus eſt per hyp. Ergo B C E, B E C *b* ſunt ſemirecti. Eodem modo oſtendam C B F, & reliquos eſſe ſemirectos, adeoque æquales inter ſe. Ergo in triangulo B A C, cùm duo ſint æquales anguli C B A, & B C A, erunt AB, & AC *c* ęquales. Eadem ratione A B, A E, A F æquales erunt. Circulus igitur centro A per B deſcriptus tranſibit etiam per EFC.

a Per 5. l. 1 *b Per cor. 11. poſt 32. l. 1.* *c Per 6. l. 1.*

Pars 2. Ex A ſint perpendiculares inſuper A G, A H, A I. Quoniam in triangulis G B A, & D B A anguli ad D, & G, itemque ad B inter ſe æquales ſunt, latuſque A B commune, latera *e* A D, A G æqualia erunt. Eadem ratione æqualia ſunt A G, A H, A I. Circulus ergo centro A per D tranſiens tranſibit etiam per G, H, I, tangetque latera *f* omnia quadrati, quia anguli ad D, G, H, I ſunt recti. Fecimus ergo, quod petebatur.

e Per 26. 1. *f Per 16. l. 3.*

PRO-

PROPOSITIO X.

Triangulum iſcoſceles conſtruere (BAC), in quo angulus ad baſim (ABC, vel ACB) ſit duplus anguli ad verticem (A.) Fig. 7.

Sumatur quævis recta AB, quam ita ſeca *a* in D, ut rectangulum ABD ſit ęquale quadrato DA. Tum centro A per B deſcribe circulum, cui inſcribe BC *b* æqualem DA, & junge AC. Erit triangulum BAC quæſitum.

a Per 11. l. 1.

b Per 1. l. 4

Ducatur enim recta DC, & per C, D, A deſcribe *c* circulum. Quoniam rectangulum ABD æquatur quadrato AD, hoc eſt BC, liquet BC tangere *d* circulum DO, quem ſecat CD. Ergo angulus BCD æquatur *e* angulo A in ſegmento alterno; additoque communi DCA, erit BCA æqualis duobus A, & DCA. Sed quia latera AB, AC æquantur, ABC æqualis *f* eſt BCA. Ergo etiam ABC æquantur duobus A, & DCA. Sed etiam externus BDC *g* æquatur duobus internis A, & DCA. Ergo ABC, & BDC ęquales ſunt. Recta igitur DC ęquatur *h* BC, hoc eſt per conſt. DA. Ergo anguli A, & DCA *i* ęquantur. Quare angulus ABC, qui duobus oſtenſus eſt ęqualis, duplus erit unius A. Factum igitur eſt, quod petebatur.

c Per 5. l. 4.

d Per 37. l. 3.

e Per 32. l. 3.

f Per 5. l. 1.

g Per 32. l. 1.

h Per 6. l. 1.

i Per 5. l. 1.

Corollarium.

Anguli ad baſim ſinguli B, & C in triangulo iſoſcelio jam conſtructio ſunt duę quintæ duorum rectorum, ſeu quatuor quintę unius recti, & reliquus A eſt una quintą duorum rectorum

 ſeu

ſeu duæ quintæ unius. Patet ex propoſitione hac, & ex 32. lib. 1.

PROPOSITIO XI.

Fig. 8. & 7. **C***Irculo pentagonum ordinatum inſcribere.*

a Per præc. Deſcribatur *a* triangulum BAC habens angulum ad baſim duplum anguli ad verticem. Huic
c Per 2. l. 4 æquiangulum CAD *c* inſcribe circulo. Angulos ad baſim ACD, & ADC ſeca bifariam rectis CE, DB occurrentibus circulo in E, & B. Puncta A, B, C, D, E rectis lineis connexa dabunt pentagonum ordinatum circulo inſcriptum.

Nam ex conſtructione liquet quinque angulos
b Per 28. l. 3. I, N, Q, S, O æquales eſſe. Quare etiam arcus iis ſubtenſi AE, ED, DC, CB, BA *b* ſunt æquales. Itaque rectæ ſubtenſæ arcubus etiam æ-
c Per 23. l. 3. quales *c* erunt. Pentagonum igitur æquilaterum eſt. Eſt verò etiam æquiangulum, *d* quia ejus
d Per 29. l. 3. anguli BAE, AED &c. inſiſtunt arcubus æqualibus BCDE, ABCD, &c. Factum eſt igitur, quod petebatur.

Corolarium.

Fig. **A**Ngulus pentagoni ordinati facit ſex quintas unius recti, ſeu tres quintas duorum. Nam tres anguli ad A, cùm ſint æquales, utpote æqualibus arcubus BC, CD, DE inſiſtentes, & medius per coroll. præced. ſit duæ quintæ unius recti, tres ſimul, hoc eſt ipſe pentagoni angulus, conficient ſex quintas unius recti.

Scholium.

Scholium.

INgenioſa eſt Euclidæa pentagoni inſcriptio, ſed multò expeditior illa Ptolomæi, quam tradit l. 1. Almageſti, & eſt ejuſmodi.

Ducantur diametri ED, BF ſe mutuò perpendiculariter interſecantes in A. Radium AD biſeca in C. Cetro C per B deſcribe arcum diametro ED occurrentem in G. Recta GB eſt latus pentagoni, & AG decagoni. Fig. 12.

Demonſtratio hic dari nequit, pendet enim à l. 13. Eucl. Eam vide apud Clavium in ſcholio poſt p. 10. l. 13.

Problema.

SUper data recta (AB) pentagonum ordinatum ita conſtrues. Seca e AB ſic, ut rectangulum ABC ſit æquale quadrato AC. Ex AB utrimque producta aufer AD, BE æquales majori ſegmento AC. Centris A, & D intervallo AB deſcribe arcus duos ſe ſecantes in F. Item centris B, & E eodem intervallo ſe ſecantes in G. Rurſum centris F, & G intervallo itidem AB alios ſe ſecantes in I. Puncta A, F, I, G, B rectis lineis juncta dabunt pentagonum ordinatum (hoc eſt æquilaterum, & æquiangulum) ſuper data AB. Fig. 9. e Per 11, l. 2.

Æquilaterum eſſe patet ex conſtructione; æquiangulum eſſe, ſic demonſtrabitur. Ducatur DF. Patet ex conſtructione, triangulum AFD eſſe iſoſceles. Et baſis AD eſt majus ſegmentum lateris DF extrema, & media ratione ſecti (eſt enim DF æqualis AB, & AD æqualis AC.) Ergo Angulus o DAF eſt duæ quintæ duorum rectorum. Ergo reliquus FAB eſt p tres quintæ duorum rectorum, ſive ſex quintæ unius recti; ac proinde eſt q angulus pentagoni ordinati. Eodem modo oſten- o Per cor. p. 10. l. 4. p Per 13. l. 1. q Per cor. p. 11. l. 4.

oſtenditur, angulum G B A eſſe ſex quintas unius recti, ac proinde parem F A B. Unde neceſse jam eſt, reliquos F, G, I bis æquales eſſe, ut patet ex 8. lib. 1. ſi concipiatur ſubtendi recta F G.

PROPOSITIO XII.

Fig. 10. *Circulo pentagonum ordinatum circumſcribere.*

Inſcribatur pentagonum ordinatum per præc. G H I k M, ducanturque tangentes in punctis, G, H, I, k, M, quæ concurrant in B, C, D, E, F. dico factum.

Ex centro duc rectas A G, A B, A H, A C, A I. Quoniam B G, B H ex uno puncto B tangunt circulum, æquales *a* erunt. Trigona igitur G A B, H A B ſibi mutuò æquilatera ſunt. Æquantur ergo *b* anguli O, P, item Q, S; ac proinde totus B duplus eſt ipſius P, & totus G A H duplus eſt S. Eadem de cauſa anguli C, & H A I dupli ſunt ipſorum T, & N. Sed G A H, & H A I æquales *c* ſunt, quia inſiſtunt arcubus æqualibus G H, H I per conſt. Ergo etiam eorum dimidii S, N æquales erunt. Quoniam igitur in triangulis B A H, C A H duo anguli S, N ęquantur, itemque duo ad H *d* recti, latuſque A H eſt commune, etiam *e* B H, C H, itemque anguli P, T ęquales erunt. Eodem modo oſtendam, rectas B G, F G eſſe ęquales. Igitur C B, F B duplæ ſunt æqualium B G, B H, ac proinde æquales. Eodem modo oſtendam, reliqua latera pentagoni circumſcripti eſſe æqualia. Illud igitur æquilaterum erit: eſt verò & æquiangulum, quia, cùm jam oſtenſum ſit, angulos B, & C duplos eſſe æqualium

a Per cor. 2. p. 36. l. 3.
b Per 8. l. 1.
c Per 28. l. 3.
d Per 18. l. 3.
e Per 26. l. 1.

P, & T etiam ipſi æquales erunt : eodemque modo & reliqui. Ordinatum igitur pentagonum circulo circumſcripſimus. Quod erat faciendum.

Eodem artificio circulo circumſcribitur ordinata figura quæcunque, ſi priùs illi ſimilis circulo inſcribatur.

PROPOSITIO XIII. & XIV.

Pentagono ordinato circulum inſcribere, & circumſcribere. *Fig. 11.*

Duos pentagoni angulos B, C biſeca rectis B N, C S concurrentibus in A. Ex A duc perpendicularem A L.

Circulus centro A per L deſcriptus tanget omnia pentagoni latera; circulus verò deſcriptus centro A per B tranſibit etiam per C, D, E, F.

Pars 1. In trigonis D C A, B C A, quia latera D C, C A *a* lateribus B C, C A, itemque *b* anguli P, & O ęquantur, etiam G, & I æquales *c* erunt. Sunt verò *a* etiam toti B, & D æquales. Quare cùm *d* angulus G ſit dimidius anguli B, etiam I erit dimidius ipſius D. Igitur D quoque biſectus eſt recta D M. Ob eandem cauſam reliqui pentagoni anguli E, F ſunt biſecti; ac proinde omnes dimidii anguli inter ſe æquales erunt. Ducantur inſuper perpendiculares A M, A S, A N, A R. Quoniam igitur in trigonis L B A, M B A anguli G, & Q æquantur, & latus L B lateri M B *e* ęquale eſt, latuſque B A commune, etiam *f* A L, A M ęquales erunt. Pari modo oſtendam reliquas A M, A S, A N, A R inter ſe ęquari. Circulus ergo centro A tranſiens per L tranſibit etiam per M, S, N, R; &, quia anguli ad L, M, S, N, R recti ſunt per

a Per hyp.
b Per cõſt.
c Per 4. l. 1.
a Per hyp.
d Per cõſt.
e Per cor. 2. p. 36. l. 3.
f Per 4. l. 1.

 conſtr.

g Per 16. l. 3. conſtr. tanget g quinque latera pentagoni. Quod erat primum.

Pars 2. In trigono C A B, quia anguli O, & G jam oſtenſi ſunt ęquales, erunt latera A C, A B h æqualia: eademque ratione æquantur etiam A B, AF, A E, A D; ac proinde circulus centro A tranſiens per B tranſibit etiam per C, D, E, F. Pentagono igitur circulum inſcripſimus, & circumſcripſimus. Quod erat faciendum.

h Per 6. l. 1.

PROPOSITIO XV.

IN dato circulo Hexagonum ordinatum deſcribere.

Fig. 13. Ducatur diameter F A B. Centro B per centrũ A deſcribe circulum, qui datum ſecet in C, & D. Item centro F per A deſcribe circulum, qui ſecet datum in E, & G. Sex puncta B, C, E, F, G, D rectis lineis connexa dabunt quæſitum.

Ex centro A emittantur rectæ AC, AE, AG, AD. Patet triangula H, I, M, L, a eſſe æquilatera; deinde quia anguli C A B, E A F ſinguli b efficiunt unam tertiam rectorum duorum, ac proinde ſimul duas tertias, patet c E A C etiam eſſe unam tertiam duorum rectorum. Anguli igitur EAC, CAB æquales ſunt, ſunt autem & latera EA, AC æqualia lateribus BA, AC. Ergo d baſis EC baſi CB, hoc eſt (ut jam oſtenſum) radio A C æqualis eſt. Quare etiam N æquilaterum eſt, Eodem modo oſtenditur æquilaterum eſſe k. Quoniam igitur triangula omnia H, I, k, L, M, N æquilatera ſunt, patet, latera ſingula CB, BD, DG, GF, FE, EC æquari radio circuli AC, ſeu AB, ac proinde inter ſe. Hexagonũ igitur

a Ex 1. l. 1.
b Per corol. 12 p. 32. l. 1.
c Per corol. 1 p 13. l. 1.
d Per 4. l. 1.

æquila-

æquilaterum eſt. Eſt verò & æquiangulum, cum ſinguli ejus anguli E, C, B, D, G, F conſtent duobus æquilateri trianguli angulis. Ergo Hexagonum, quod circulo inſcripſimus, eſt ordinatum.

Corollaria.

1 Latus hexagoni circulo inſcripti æquale eſt radio.

2 Angulus hexagoni ordinati eſt quatuor tertiæ unius recti, conſtat enim ex duobus angulis trianguli æquilateri, quorum ſinguli conficiunt *d* duas tertias unius recti. *d Per corol. 12. p. 32. l. 1.*

3 Si ducatur inſuper diameter P S perpendicularis alteri F B, & intervallo radii P A centris P, & S ſectiones fiant in O, & Q, in R, & T; puncta P, L, R, F, O, G, S, D, T, B, Q, C rectis lineis connexa dabunt duodecangulum ordinatum una circini apertura circulo inſcriptum. Id quod magno eſt uſui in Gnomonica. *Fig. 14.*

4 Ex demonſtratis elicitur etiam deſcriptio facillima trianguli æquilateri in circulo. Ducta diametro F B centro B per A centrum deſcribe arcum C A D. Puncta C, F, D rectis juncta dant æquilaterum quæſitum. *Fig. 14.*

4 Æquilateri trianguli latus C X D à diametro B F ad ipſum perpendiculari quartam partem B X abſcindit. Nam anguli A C X, B C X æqualibus arcubus G D, D B inſiſtentes æquales *e* ſunt; & latera A C, C X æquantur lateribus B C C X. Ergo A X, B X *f* æquales ſunt. Ergo B X eſt quarta pars diametri B F. *e Per 29. lib. 3.* *f Per 4. l. 1.*

Scholium.

Problema.

Fig. 13. r Per 1.l. 1. *HExagonum ordinatum ſuper data recta C B ita conſtrues: Fac r triangulum C A B æquilaterum ſupra datam C B. Centro A per B, & C deſcribe circulum. Is capiet hexagonum ſuper datam C B. Patet ex propoſ. & coroll.* 1.

Theorema.

QUadratum ex latere trianguli æquilateri triplum eſt quadrati ex ſemidiametro circuli, Fig. 14. *cui inſcriptum eſt, adeoque ad quadratum diametri eſt ut* 3. *ad* 4.

Ducatur ſemidiameter A D. Quadratum F D æquatur quadratis s *F A, D A, & rectan-* s Per 12.l. 1. *gulo F A X bis. Sed rectang. F A X bis eſt par quadrato ſemidiametri F A ſeu D A (nam quia A X, X B æquales* t *ſunt, rectangulum F A X bis* t Per cor. 5. præc. *æquatur duobus rectangulis nempe ſub F A, A X, & ſub F A, X B; hoc eſt rectangulo* u *F A B; hoc eſt* u Per 1.l. 2. *quadrato F A.) Ergo quadratum F D triplum eſt quadrati ex ſemidiametro.*

Quia autem quadratum totius diametri F B quadruplum x *eſt quadrati F A, patet quadratum* x Per 4. lib. 2. *F D eſſe ad quadratum diametri ut* 3. *ad* 4.

Hinc ſequitur latus æquilateri trianguli eſſe ad diametrum, ut radix quadrata ternarii eſt ad 2, *radicem nempe quadratam quaternarii, ac proinde eſſe lineas incommenſurabiles.*

PRO-

PROPOSITIO XIV. Fig. 15.

I*N circulo quindecagonum ordinatum deſcribere.*

Circulo inſcribe *a* latus pentagoni A C, & trianguli *b* ęquilateri latus A D. Arcum C D biſeca in E. C E eſt latus quindecagoni. *a Per. 11. l. 4.* *b Per corol. 4. p. 15. l. 4.*

Nam ſi tota peripheria ſtatuatur eſſe 15, erit arcus A C 3, & arcus A D 5, ac proinde arcus C D 2, ideoque C E vnum.

Corollarium.

HAc methodo innumeræ figuræ ordinatæ circulo inſcribentur. Nam ſi duarum ordinatarum latera A C, A D circulo ſint inſcripta, arcuum differentia C D continebit tot latera novæ figuræ ordinatæ quot vnitatibus differunt denominatores priorum. Denominator autem novæ figuræ habetur, ſi denominatores priorum inter ſe multiplicentur. Fig. 15.

Ut ſi A D ſit latus quadrati, & A C decagoni. Denominatorum differentia eſt 6. Igitur arcus C D continet 6 latera figuræ novæ. Ea verò eſt 40 laterum. Denominatores enim 4, & 10 inter ſe multiplicati faciunt 40.

Scholium.

N*Ondum reperta ars eſt, qua ſolo circino, & regula inſcribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9, 11, 13, 17, &c. Cùm illa inſcriptio figurarum dependeat à diviſione circumferentię in partes datas, quę etiamnum deſideratur. Licebit tamen, circuli circumferentia in 360 partes diviſa, mechanicè figuras quaſcunque ordinatas circulo inſcribere hunc in modum.*

Pro-

Problema 1.

Fig. 15. G*Radus 360. (hoc eſt totam circumferentiam) divide per denominatorem polygoni inſcribendi (exem. gr. nonanguli): quot unitatibus conſtat quotiens (40.) tot graduum fac in centro angulum AGK. AK erit latus figuræ quæſitæ (nonangulæ) circulo inſcribendæ.*

Problema 2.

Fig. 15. A*T ſuper data recta quamvis figuram ordinatam deſcribes præſidio tabellæ ſequentis; Angulus rectus eſt ad angulum figuræ.*

					differ.
In Pentagono	*ut*	5	*ad*	6...	1
Hexagono	*ut*	3	*ad*	4...	1
Heptagono	*ut*	7	*ad*	10...	3
Octogono	*ut*	2	*ad*	3...	1
Nonagono	*ut*	9	*ad*	14...	5
Decagono	*ut*	5	*ad*	8...	3
Undecagono	*ut*	11	*ad*	18...	7
Duodecagono	*ut*	3	*ad*	5...	2

Fig. 15. *Oporteat igitur ſuper data recta XB heptagonum ordinatum deſcribere. Centro X deſcribe circulum, à quo abſcinde quadrantem BO. Vide in tabula quę ſit proportio recti anguli ad angulum heptagoni, reperies, ut 7. ad 10. & differentia eſt 3. Quadrantem igitur partire in 7. arcus æquales, quorum adhuc tot ipſi adde ex O in N, quot unitates habet differentia. Per tria puncta BXN deſcribe a circulum, hic capiet heptagonum datæ rectæ XB.*

a Per 5. l. 4.

Tabella confecta eſt ope theorematis 2. in ſchol. poſt

Tab



4.

poſt 32. l. 1. quo reperitur numerus rectorum angulorum, quos efficiunt anguli cujuſcunque rectilinei, qui numerus diviſus per denominatorem figuræ exhibet denominatorem proportionis anguli figuræ ad rectum.

Quoniam verò de figuris ordinatis multa hactenùs ſunt propoſita, finiat hunc librum Procli celebre Theorema.

Theorema.

Tres tantùm figuræ ordinatę videlicet 6. triangula æquilatera, 4. quadrata, 3. hexagona ſpatium replere poſſunt, hoc eſt unam continuam ſuperficiem conſtituere. Quod ſic demonſtratur. Ut aliqua figura ordinata ſæpiùs repetita poſſit replere ſpatium, requiritur, ut anguli plurium ejus ſpeciei figurarum circa unum punctum compoſiti poſſint conficere quatuor rectos; tot enim circa unum punctum poſſunt conſtitui, ut patet ex coroll. 3. p. 13. l. 1. ex. gr. ut triangula æquilatera poſſint replere ſpatium, requiritur, ut aliquot anguli talium triangulorum N, M, L, K, I, H, circa punctum A compoſiti efficiant quatuor rectos. Atqui quatuor rectos efficiunt 6. anguli trianguli æquilateri (nam unus facit duas tertias b unius recti, ac proinde 6. faciunt 12. tertias unius recti, hoc eſt 4. rectos;) item 4. anguli quadrati, ut patet; item 3. anguli hexagoni (unus enim facit 4. tertias c unius recti, ac proinde 3. faciunt 12. tertias unius recti, hoc eſt rurſùm 4. rectos.) Ergo &c.

Fig. 13.

b Per cor. 12. p. 32. l. 1.

c Per cor. 2. p. 15. l. 4.

Quod autem id nulla alia figura poſſit, liquidò conſtabit, ſi angulum ejus repertum, ut ſuprà, quocunque numero multiplices; ſemper enim aut deficient à 4. rectis, aut excedent.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER V.

QUanti momenti in Geometria ſit ſcientia proportionum, nemo eſt Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto, & ſexto libro. Sed quamvis illi, ceteriſque elementorum conditoribus plurimum debeamus; in iis tamen, quæ de proportione tradiderunt, deſiderari aliquid videtur. Difficultas tota in definitione 5. l. 5. vertitur, ubi tradit Euclides, quid ſit quatuor magnitudines eſſe proportionales, ſive duas rationes eaſdem, ſimiles, æquales eſſe. Definit igitur duas rationes tùm æquales dici, ſeu ſimiles, quando antecedentia quocunque numero æqualiter multiplicata conſequentibus etiam quocunq; numero æqualiter multiplicatis ſemper vel ſimul ęqualia ſunt, vel ſimul majora, vel ſimul minora. a Atque ex ea definitione omnes deinde 5. & 6. libri demonſtrationes mediatè, vel immediatè deducit. Hæc doctrinæ Euclidææ ſumma eſt, quæ multiplicem, ut dixi, difficultatem habet. Nam in primis certum eſt, ea definitione non naturam æqualium rationum, ſed affectionem ſolummodò aliquam explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur, vel tanquam ſignum infallibile rationum æqualium, ut quandocunque ea demonſtrata fuerit de quibuſvis rationibus, inferre certò liceat, æquales eas eſſe; vel is ſenſus illius eſt, ut per magnitudines

a Per definitio declaratur.

infra. poſt def. 6.

nes

nes eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit, quàm earum multiplices modo jam dicto excedere, vel excedi. Si primum, demonſtrare debuerat, eam affectionem omnibus, & ſolis rationibus æqualibus ineſſe, ut ex ea rationũ æqualitas certò poſſit inferri. Id verò minimè vulgare theorema eſt, quod neque Euclides, neque alius poſt Euclidem ullus demonſtravit Si ſecundum; ſecuri quidem erimus de veritate theorematum in ſenſu definitionis acceptorum, minimè tamen ex vi demonſtrationum nobis conſtare poterit de abſoluta rationum æqualitate. Exemplum eſto prima ſexti. Certi erimus ex Euclidæa demonſtratione, rationem triangulorum ABC, & DEF æqualem eſſe rationi baſium AC, & DF per rationum æqualitatem ſolùm intelligendo dictam illam proprietatem multiplicium; non colligemus tamen rationes illas triangulorum baſium rationibus verè, & abſolutè æquales eſſe, cùm demonſtratum non ſit, affectionem illam multiplicium cum abſoluta, & vera rationum æqualitate neceſſariò eſſe connexam. Quomodocunque igitur illa definitio accipiatur, librorum 5. ac 6. demonſtrationes vacillant, quamdiù demonſtratum non fuerit, veram rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate ſemper eſſe connexam. Denique ut ſibi conſtarent omnia, tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliiſque ſemper diſplicuit, & tyronibus plurimum ſemper faceſſivit negotii, quorum ita plerumque mentes intricat, ut exitum vix reperiant. Quare ut doctrinam proportionum, quæ quaſi medulla, atque anima Geometriæ, & univerſæ Matheſeos eſt, ab ea labe vindicemus, hæc tria præſtare conabimur.

Fig. 2. l. 6. tabula 4.

Primò oſtendã libri quinti theoremata, quę ab Euclide

clide per multiplices demonſtrantur, eo ferè loco habenda eſſe, quo axiomata, ac proinde declaratione potiùs ſubinde aliqua, quam demoſtratione egere. Ita proportionum cognitio, quam ille circuitus multiplicium difficilem hactenùs, & perobſcuram effecerat, plana, & expedita reddetur.

Secundò demonſtrabimus, quandocumque antecedentium quælibet æquè multiplices conſequentium quibuslibet æquè multiplicibus vel pariter majores ſunt, vel pariter minores, vel pariter æquales, tùm rationes eſſe verè æquales, ſeu ſimiles. Quo ſtabilito omnes Euclideæ demonſtrationes, totaque illius de proportionibus doctrina ſubſiſtet, ut, qui noſtris probationibus contentus non ſit, ad Euclideas quamvis prolixas, jam tamen ſecuras, ac ſolidas ſe poſſit convertere. Aſſignabimus item, ac demonſtrabimus proportionum æqualium aliud indicium clariſſimum, ac primum, ex quo omnes Quinti libri propoſitiones deducere poterit, qui voluerit.

Tertiò. De proportionum denominatoribus, algorythmo, compoſitione tractatum ſubjungam penitioris Geometriæ ſtudioſis planè neceſſarium, ubi etiam demonſtrabimus axioma illud, ſeu potiùs theorema hactenùs indemonſtratum rationem extremorum ex rationibus quotlibet intermediorum componi.

Tyronibus ſatis erit definitiones, & primam partem perlegere.

PRI-

PRIMA PARS.

Proportionum elementa faciliori methodo proponuntur.

PROPOSITIONES.

1 PArs aliquota magnitudinis eſt, quæ aliquoties repetita magnitudinem metitur, ſive adæquat. Pars aliquanta, quæ non metitur.

Longitudo unius pedis eſt pars aliquota longitudinis 10 pedum, quia illam decies repetita metitur. Longitudo verò 4. pedum eſt pars aliquanta lineæ 10 pedum, quia aliquoties repetita, nempe bis illam non adæquat, repetita verò ter excedit.

2 Magnitudo magnitudinis multiplex eſt, cùm minor metitur majorem, ac proinde ejus pars aliquota eſt, ſive cùm major minorem aliquoties continet præcisè.

3 Ratio, ſive proportio eſt duarum ejuſdem generis magnitudinum mutua quædam ſecundùm quantitatem habitudo.

Sunt igitur in omni proportione duo termini, quorum ille Antecedens dicitur, qui primò nominatur, ſive is, qui nominandi caſu effertur, alter Conſequens.

Cùm antecedens, & conſequens ſunt æquales, proportio æqualitatis dicitur, cùm inæquales, dicitur eſſe proportio inæqualitatis.

4 Ratio, ſeu proportio rationalis eſt, quæ exiſtit inter magnitudines commenſurabiles, & numeris exprimi poteſt. Proportio irrationalis eſt,

eſt, quæ exiſtit inter magnitudines incommenſurabiles. & nullis numeris explicari poteſt.

Porrò commenſurabiles quantitates ſunt, quas aliqua communis menſuras metitur, incommenſurabiles, quas nulla metitur menſura communis.

Fig. 1. *l.* 5. *tabula.* 5. 5 Duæ rationes (A ad B, & C ad F) ſunt ſimiles, æquales, eædem, cùm unius antecedens (A) æquè, ſeu eodem modo (hoc eſt nec magis, nec minùs) continet ſuum conſequens (B) quo alterius antecedens (C) continet ſuum conſequens (F.)

Fig. 2. Vel quando unius antecedens (A) eodem modo continetur in ſuo conſequente (B), quo (C) antecedens alterius in ſuo (D.)

Fig. 3. 6 Duæ rationes ſunt diſſimiles, ſive una ratio eſt major altera, quando unius antecedens (I) magis continet ſuum conſequens (L), quàm

Fig. 4. alterius antecedens (O) contineat ſuum conſequens (Q), vel quando antecedens unius minùs continetur in ſuo conſequente, quàm antecedens alterum contineatur in conſequente ſuo.

Proportionum æqualitas, & inæqualitas explicatur.

Quid porrò ſit vnum antecedens æquè, vel magis continere ſuum conſequens, quàm anteсedens alterum contineat ſuum, ſi porportiones ſint rationales, definiri, & explicari ulteriùs

Fig. 1. *poteſt per numeros, ut ſi A ſit triplum B, & C tri-triplum F, perſpicuum erit quid ſit, A æquè, ſeu*

Fig. 3. *eodem modo continere B, quo C continet F: vel ſi I ſit triplum L, O vero duplum Q: conſtabit rursùm, quid ſit I magis continere L, quàm O*

con-

contineat Q, At, ſi proportiones fuerint irrationales; ea res explicari ulteriùs nec poteſt, nec debet. Dentur magnitudines incommenſurabiles A, B, perſpicuum eſt, A non ſolùm majus eſſe B, ſed etiam certo quodam modo eſſe majus, (A quippe aliter continet B, quàm alia quælibet major, minorvè quàm A:) neque tamen ulteriùs quæri, aut explicari debet, quis ſit certus ille modus, quo A continet B, quia per nullos numeros explicabilis eſt. Itaque quemadmodum datis binis incommenſurabilibus quantitatibus non debet ulteriùs queri, quid ſit unam certo modo continere alteram, ita neque, cùm dantur quatuor proportionales incommenſurabiles, quæri debet ulteriùs, quid ſit C eodem modo continere D, quo A continet B. Sicuti enim modus, quo A continet B, ulteriùs eſt inexplicabilis, ita planè etiam identitas modi, quo A continet B, cum modo, quo C continet D, ulteriùs inexplicabilis eſt. Fig. 5.

Quòd verò cuicumque proportioni irrationali A ad B dabiles ſint infinitæ aliæ proportiones irrationales æquales, majores, minores, diverſis terminis conſtantes, facilè poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quæcumque quantitas C, & auferatur B ex A incommenſurabili ſecum quantitate, quoties poteſt, puta ter, & ſuperſit E F. Sit deinde O tertia pars ipſius C, ſit inſuper quæpiam X ipſi C incommenſurabilis, quæ major ſit, quàm O. Quoniam igitur A continet B plùs quàm ter, C verò continet X minùs quàm ter (nam C continet præcisè ter O minorem quàm X) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiatur jam Q quarta pars C, & quæpiam eſto Z ipſi C incommenſurabilis, quæ minor ſit, quàm Q. Quoniam igitur A continet B minùs, quàm quater, C verò con- Fig. 5.

tinet Z plùs, quàm quater (cùm C præcisè quater contineat Q majorem, quàm Z), erit ratio irrationalis C ad Z major ratione irrationali A ad B.

Iam verò, quia C ad aliquam X minorem rationem habet, quàm A ad B, & rursùm, quia C ad aliquam Z majorem rationem habet, quàm A ad B, manifeſtum eſt etiam C ad aliquam D mediam inter X, & Z eandem habere rationem, quam A ad B. Quod quidem perinde clarum eſt lumine naturali, atque iſtud; dabile eſt majus, quàm T, & dabile eſt minus, quàm T, ergo dabile eſt æquale aliquod ipſi T.

Quid in proportionum æqualium definitione Euclidæa deſideretur.

Fig. 21. *QUod ad Euclidem attinet, is duas proportiones A ad B, C ad F æquales eſſe dicit, cùm antecedentium quæcunque æquè multiplices I, Q conſequentium quibuſcunque æquè multiplicibus L, R vel ſimul majores ſunt, vel ſimul minores, vel ſimul æquales, hoc eſt, cùm I ſuperat L, etiam Q ſemper ſuperat R; & cùm I ſuperatur ab L, etiam Q ſemper ſuperatur ab R; & cùm I eſt æqualis L, etiam Q ſemper eſt æqualis R. Ubi benè notandum eſt, Euclidem non aſſumere æquè multiplicium exceſſus, defectuſque proportionales, ſeu ſimiles, ſic enim ineptè idem per idem explicaſſet; ſed exceſſus, & defectus ſimpliciter. Nihilominus hìc aliquid in ſummo Geometra deſiderari jam ſuprà declaravimus. Nam vel cupit hiſce verbis rationes æquales definire, & ſic rei definitæ proprietatem pro definitione affert: evidens quippe eſt, hanc multiplicium affectionem ex rationum æqualitate pro-*

profluere; vel adducit tanquam indicium primum, & infallibile rationum æqualium; & ſic demonſtrare debuerat, eam cum rationum æqualitate ita ſemper eſſe connexam, ut hęc ex illa certò poſſit inferri. Quę quidem connexio & perobſcura, & demonſtratu difficilis eſt; vel denique per rationum æqualitatem nihil aliud intelligit, quàm ſimultaneum illum exceſſum, defectumve multiplicium; & ſic toto 5. ac 6. libro, cùm quatuor magnitudines proportionales eſſe demonſtrat, nihil ſciemus aliud, quàm dictum exceſſum, & defectum illis competere, incerti planè utrum magnitudines, de quibus agitur, ſint verè proportionales.

Proportionum æqualium aliud indicium primum, & infallibile aſſignatur.

Quòd ſi rationum æqualium deſideretur indicium infallibile, & facile, & primum, nos tale aſſignabimus, demonſtrabimuſque theor. 5. & 6. partis 2. eſtque ejuſmodi.

Rationes o æquales ſunt (AB ad CF, GM ad NQ) quando & conſequentes ipſæ, & conſequentium ſimiles partes aliquotæ quæcunque in antecedentibus æquali ſemper numero continentur. Fig. 26. o Majoris inæqualitatis.

Ut ſi una decima ipſius CF contineatur in AB ducenties, una quoque decima NQ contineatur ducenties in GM; & ſi una centeſima CF contineatur millies in AB, etiam una centeſima NQ contineatur millies in GM; & ſic deinceps in infinitum, erit AB ad CF, ut GM ad NQ.

Inęquales autem rationes ſunt, quando aut conſequentes ipſę, aut conſequentium aliquæ ſimiles ali-

quotæ in antecedentibus inæquali numero continentur; & illaratio major eſt, cujus vel conſequens, vel conſequentis aliquota ſæpiùs continetur in antecedente.

Fig. 26. *Ut ſi una centimilleſima C F ſæpiùs contineatur in A B, quàm una centimilleſima N Q in G M, erit ratio A B ad C F major ratione G M ad N Q, quamvis innumeræ aliæ conſequentium C F, N Q ſimiles aliquotæ in antecedentibus A B, G M æquali numero continerentur.*

Porrò æquali numero contineri dicuntur, cùm ablatæ quoties poſſunt, æquali numero ſunt ablatæ.

Ex hoc indicio rationum irrationalium æqualitas, & inæqualitas continuò elucefcit, cùm ſic antecedentes conſequentibus incommenſurabiles per ablata conſequentibus commenſurabilia, & proportionalia exhauriantur.

7 Similes partes ſunt, quæ in ſuis totis æquè, ſeu eodem modo continentur, ut qualis pars ſui totius eſt una, talis pars ſui totius ſit altera. Quod ſanè nihil aliud eſt, quàm partes ad ſua tota eandem habere rationem.

Similes verò partes aliquotæ ſunt, quæ ſua tota æqualiter metiuntur, ut ſi utraque ſit ſui totius una tertia, una decima, &c.

Fig. 6. 8 Magnitudines (A B C D) continuè proportionales dicuntur, cùm medii termini (B, C) bis ſumuntur; hoc eſt, cùm ſunt conſequens reſpectu præcedentis, & antecedens reſpectu ſequentis.

Continuas rationes ſic efferimus, A eſt ad B, ut B ad C; & B eſt ad C, ut C ad D, & ſic deinceps.

9 Magnitudines diſcretim proportionales ſunt, cùm nullus terminus bis accipitur.

Di-

Diſcretas rationes ſic efferimus: A eſt ad B, ut C ad F. Cùm plures fuerint proportionales magnitudines, quàm tres, ſi proportionales dicantur, ſemper intelligitur diſcretim. Fig. 1.

10 Cùm magnitudines (A B C D) fuerint continuè proportionales, prima (A) ad tertiam (C) habere dicitur rationem duplicatam ejus rationis, quam eadem prima (A) habet ad ſecundam (B); & prima (A) ad quartam (D) rationem habere dicitur triplicatam ejus, quam eadem prima habet ad ſecundam (B), & ſic deinceps. Fig. 6.

11 Homologæ, ſeu ſimiles ratione magnitudines dicuntur antecedentes antecedentibus, conſequentes conſequentibus. Ut ſi A eſt ad B, ut C ad F; homologæ erunt A, C, & B, F. Fig. 1.

Reliquæ definitiones commodiùs ex ipſis propoſitionibus intelligentur.

Quintus liber propoſitiones complectitur 25. Ex his 10. non alium uſum habent, quàm ut reliquæ earum ope per multiplices demonſtrentur. Illis igitur prætermiſſis 15 reliquas proponemus ſolas Euclidis ordine non mutato. Porrò hujus libri theoremata non ſolis lineis, ſed omnibus omninò quantitatibus conveniunt. Lineæ igitur, quibus hic utimur, omne genus quantitatis repræſentant.

Axioma.

DAtis tribus quantitatibus A, B, C dabilis eſt quarta Z, ad quam C eam proportionem habet, quam A habet ad B.

PROPOSITIO 1.2.3.4.5.6.

IN *noſtra methodo ſunt ſuperfluæ.*

PROPOSITIO VII.

Fig. 7. *SI quantitates A, & B fuerint æquales, & alia quæpiam detur Z: erit A ad Z, ut B eſt ad Z; & Z erit ad A, ut eadem Z eſt ad B.*

Hæc propoſitio, ut & ſequentes quatuor, ſunt meriſſima axiomata, ac proinde nullo modo demonſtrari debent.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8. *SI quantitates (C, & F) fuerint inæquales, major C ad tertiam Z majorem habebit rationem, quàm minor F habeat ad eandem Z.*

Et Z ad majorem C minorem habebit rationem, quàm eadem Z habeat ad F, quæ minor eſt, quàm C.

PROPOSITIO IX.

Fig. 7. *SI A, & B ad Z eandem habeant rationem, æquales ſunt A, & B.*

Et ſi eadem Z ad A, & B eandem rationem habeat, rursùm A, & B æquales erunt.

PRO-

PROPOSITIO X.

SI C ad Z majorem rationem habeat, quàm F ad Z, erit C major, quàm F. Fig. 8.

Et ſi Z ad F majorem rationem habeat, quàm eadem Z ad C, erit F minor, quàm C.

PROPOSITIO XI.

RAtiones, quæ eidem rationi ſunt æquales, eædem, ſimiles, (idem omnia ſignificant) ſunt æquales, eædem, ſimiles inter ſe. Fig. 9.

Ut ſi tàm ratio A ad B, quàm ratio C ad F ſint æquales rationi X ad Z, erunt quoque rationes A ad B, & C ad F æquales inter ſe. Sive ſi A ſit ad B, ut X ad Z, & C ſit ad F, ut X ad Z; erit quoque A ad B, ut C ad F.

Eodem modo rationes, quæ æqualibus ſunt æquales, inter ſe ſunt æquales.

PROPOSITIO XII.

SI ſingulæ magnitudines quotcumque (A, B C) eandem habuerint proportionem ad ſingulas totidem (F, I, L), quam proportionem habent ſingulæ ad ſingulas, ſive una (A) ad unam (F), eandem habebunt omnes (A, B, C) ſimul ſumptæ ad omnes (F, I, L) ſimul ſumptas. Fig. 10.

Rem per ſe manifeſtam exemplo tantùm aliquo

rationali declaro; ut ſi ſingulæ A B C ſingularum F,I,L ſint triplæ (hoc eſt, ſi ſingulæ ad ſingulas eandem habeant rationem quam 3 ad 1), etiam A, B, C ſimul ſumptæ ſimul ſumptarum F, I, L triplæ erunt, (hoc eſt, etiam A, B, C ſimul ſumptæ ad F, I, L ſimul ſumptas rationem habent eandem, quam 3 ad 1.) In proportione irrationali res æquè clara eſt.

PROPOSITIO XIII. XIV.

IN *noſtra methodo ſunt ſuperfluæ.*

PROPOSITIO XV.

Fig. 10. *ALiquotæ ſimiles (F, I) eandem inter ſe rationem habent, quam totæ (A, B.)*

Fig. 11. *Et univerſim partes ſimiles (C, F) ſunt inter ſe, ut totæ (A, B.)*

Verè inſtar axiomatis haberi poteſt, ſi rectè intelligatur, quid ſint partes ſimiles. Vide deſin. 7.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 11. vel 1. *SI prima (A) ſit ad ſecundam (B,) ut tertia (C) ad quartam (F,) etiam permutando erit prima (A) ad tertiam (C,) ut ſecunda (B) ad quartam (F.)*

Ponantur B, & F eſſe minores, quàm A, & C, nam ſi æquales ſint, res patet. Quoniam A ponitur eſſe ad B, ut C ad F, erunt per deſin. 7. B & F toto-

F totorum A, & C partes ſimiles, ac proinde per præced. quam proportionem inter ſe habent totæ A, C, eam quoque habent partes ſimiles B, F; hoc eſt, A eſt ad C, ut B ad F.

Scholium.

SI A eſt ad B, ut C ad F, etiam invertendo erit ut B ad A, ſic F ad C. Per ſe patet.

Apud Euclidem hoc eſt corollarium prop. 4. quæ cùm in noſtra methodo tanquam ſuperflua ſit omiſſa, viſum eſt corollarium illud hoc loco poner.

PROPOSITIO XVII.

SI antecedens unum (AB) ſit ad conſequens (CB, ut antecedens alterum (FI) ad conſequens alterum (LI;) etiam dividendo erit (AC) exceſſus antecedentis primi ſupra ſuum conſequens ad idem conſequens (CB,) ut (FL,) exceſſus antecedentis ſecundi ſupra conſequens ſecundum ad ſecundum conſequens (LI. Fig. 12.

Axiomatis inſtar aſſumi poteſt: ſi tota AB, FI eandem rationem habeant ad X, & Z, etiam ſimilibus partibus mulctata eandem ad X, & Z pergent habere rationem; hoc eſt, adhuc AB ſic mulctata erit ad X, ut FI ſic mulctata ad Z. Id verò eſt, quod aſſerit propoſitio. Nam quia ponitur AB eſſe ad CB, ut FI ad LI, erunt *a* CB, L I ſimiles partes totorum AB, FI; & AC, FL erunt tota ſimilibus partibus mulctata. Cùm ergo tota habuerint ad CB, LI eandem rationem, etiã AC, FL, (hoc eſt tota ſimilibus partibus mulctata) pergent ad CB, LI eandem inter ſe habere rationem, *a Per def. 7. l. 5.*

rationem, hoc eſt adhuc erit AC ad CB, ut FL ad LI.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 12 *SI antecedens unum (AC) ſit ad conſequens unum (CB,) ut antecedens alterum (FL) ad conſequens alterum (LI;) etiam componendo erit (AC cum CB) primum antecedens cum ſuo conſequente ad idem conſequens (CB,) ut (FL cum LI) ſecundum antecedens cum ſuo conſequente ad conſequens (LI.)*

Rursùm enim inſtar axiomatis aſſumi poterit: ſi duæ quantitates AC, FL eandem ad X, & Z habeant rationem, etiam AC, FL ſimiliter, ſeu proportionaliter auctę pergent ad X, & Z eandem habere rationem: hoc eſt adhuc erit AC ſic aucta ad X, ut FL ſic aucta ad Z. Id verò eſt quod propoſitio aſſerit. Nam ponitur AC eſſe ad CB, ut FL ad LI. Quare ſi ipſis AC, FL addantur CB, LI; erunt AC, FL proportionaliter, ſeu ſimiliter auctæ. Cùm igitur AC, FL eodem modo ſe habeant ad CB, LI, etiam cùm ſimiliter fuerint auctæ (hoc eſt ipſæ jam AB, FI) pergent ad eaſdem CB, LI eodem modo ſe habere; hoc eſt adhuc AB erit ad CB, ut FI ad LI.

Corollarium I.

Fig. 12. SI antecedens unum (AB) fuerit ad conſequens (CB,) ut antecedens alterum (FI) ad conſequens alterum (LI,) etiam antecedens primum (AB) erit ad (AC) exceſſum ſuum ſupra conſequens, ut antecedens alterum (FI) eſt ad (FL)

(F L) exceſſum ſuum ſupra conſequens alterum LI.

Cùm e nim A B ſit ad C B, ut FI ad LI, erit dividendo *a* A C ad C B, ut F L ad L I; & invertendo *b* B C ad C A, ut I L ad L F; & componendo *c* B A ad C A, ut I F ad L F. *a Per 17. l. 5.* *b Per ſchol. p. 16. l. 5.* *c Per 18. l. 5.*

Hæc argumentatio vocatur converſio rationis.

Corollarium 2.

SI A C eſt A B, ut F L ad F I, erit quoque A C ad C B, ut F L ad L I; & A B ad C B, ut F I ad L I. *Fig. 12.*

Cùm enim ſit ut A C ad A B, ſic F L ad F I, erit invertendo B A ad C A, ut I F ad L F; & divid. *d* B C ad C A, ut I L ad L F; & rursùm invertendo A C ad C B, ut F L ad L I, & compon. *e* A B ad C B, ut F I ad L I. *d Per 17. l. 5.* *e Per 18. l. 5.*

PROPOSITIO XIX.

SI ut totum (AB) eſt ad totum (F I,) ita ablatum (C B) ſit ad ablatum (L I;) etiam ut totum eſt ad totum, ità reliquum (A C) erit ad reliquum (F L.) *Fig. 12.*

Omninò clarum eſt per ſe. Poteſt tamen ex præcedentibus ſic oſtendi; quoniam A B eſt ad F I, ut C B ad L I, erit permutando *a* A B ad C B, ut F I ad L I. Ergo per converſionem rationis A B eſt ad A C, ut *b* F I ad F L. Ergo permutando *c* ut A B ad F I, ita A C ad F L. *a Per 16. l. 5.* *b Per cor. 1. præc.* *c Per 16. l. 5.*

PROPO-

PROPOSITIO XX. XXI.

IN *noſtra methodo ſunt ſuperfluæ.*

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13. *SI fuerit A ad B, ut O ad Q, & B ad C, ut Q ad R, & ſic deinceps erit ex æquo ut A prima ad C ultimam, ita O prima ad ultimam R.*

Ponantur C, R eſſe minores, quàm B, Q; eadem foret oſtenſio, ſi majores ponerentur. Quoniam a B eſt ad C, ut Q ad R; erunt C, R totorum B Q b partes ſimiles. Cùm igitur A, & O ad B, & Q eandem habeant rationem, habebunt quoque ad C, & R, quæ ſunt ipſorum B, & Q partes ſimiles eandem rationem. Inſtar enim axiomatis eſt, ſi duæ quantitates ad alias duas eandem inter ſe habuerint rationem, etiam ad partes earum ſimiles eandem inter ſe habere rationem.

a Per hyp.
b Per defi. 7. l. 5.

Si plures fuerint utrimque quantitates, quàm tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 14. *SI fuerit ut A prima ad B ſecundam, ita O prima ad Q ſecundam, & ut B ſecunda ad C tertiam, ita tertia quæpiam R ad primam O, erit ex æquo ut A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q ſecundam.*

o Per axio. te 1. l. 1.

Ut B eſt ad C, ita o poteſt Q eſſe ad aliam quãpiam

piam S. Jam quia ut B ad C, ſic *p* R eſt ad O, & *p Per hyp.*
ut B ad C, *q* ſic Q eſt ad S, erit R ad O, *a* ut Q *q Per cõſt.*
ad S. Igitur permutando *b* R eſt ad Q, ut O ad *a Per 11. l. 5.*
S. Deinde, quia O eſt ad Q, ut *f* A ad B, & Q *b Per 16.*
eſt ad S, *i* ut B ad C, ex æquo erit O ad S, ut *l. 5.*
c A eſt ad C. Sed jam oſtendi R eſſe ad Q, ut O *f Per hyp.*
eſt ad S. Ergo etiam *d* R eſt ad Q, ut A ad C. *i Per cõſt.*
c Per præc.
d Per 11. l. 5.

Vocatur à Geometris hæc ratio perturbata.

PROPOSITIO XXIV.

S*I fuerit ut A ad B, ita C ad F, & ut I ad B, ita L ad F, erit ut A cum I ad B, ita C cum L ad F.* *Fig. 15.*

Quoniam I per hyp. eſt ad B, ut L ad F, erit
quoque *a* invertendo B ad I, ut F ad L. Cùm *a Per ſchol. p. 16. l. 5.*
igitur A ſit ad B, *b* ut C ad F, & B ad I, ut F *b Per hyp.*
ad L, ex æquo erit *c* ut A ad I, ſic C ad L. Igi- *c Per 22. l. 5.*
tur *d* componendo ut AI eſt ad I, ſic CL eſt
ad L. I verò eſt ad B, *e* ut L ad F. Rursùm *d Per 18. l. 5.*
igitur *f* ex æquo AI eſt ad B, ut CL ad F. *e Per hyp.*
f Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXV.

S*I quatuor magnitudines (AB, CF, I, L) fuerint proportionales, maxima (AB), & minima (L) duabus reliquis (CF, & I) majores erunt.* *Fig. 16.*

Sit AB ad CF, ut I ad L. Ex maxima AB
ſumatur AQ æqualis I, & ex CF ſumatur
CR par minimæ L. Erit igitur AB tota ad
totam CF, ut ablata AQ ad ablatam CR. Ergo
reliqua QB eſt ad reliquam *a* RF, ut tota AB *a Per 19.*
ad totam CF. Sed AB major eſt *b* eſt, quàm CF. *l. 5.*
Ergo *b Per hyp.*

Ergo & Q B major, quàm RF. Jam verò quia A Q ipſi I, & CR ipſi L æquales ſunt, etiam A Q cum L ipſi I cum C R æquales erunt. Quare, ſi ad A Q cum L addatur majus Q B, & ad I cum C R addatur minus R F, erit totum A Q B cum L majus toto I cum C R F. Quod erat demonſtrandum.

Quæ ſequuntur non ſunt propoſitiones Euclidis, ſed ex Pappo Alexandrino, aliiſque deſumptæ ob frequentem earum uſum Euclidæi ſubjungi ſolent.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 17. *SI prima (A) ad ſecundam (B) majorem rationem habeat, quàm tertia (C) ad quartam (F), habebit invertendo (B) ſecunda ad (A) primam minorem rationem, quàm (F) quarta ad (C) tertiam.*

Quoniam ponitur A habere ad B majorem rationem, quàm C ad F. Igitur A ad *o* aliquam B X (quæ *a* major erit quàm B) eandem habebit rationem, quàm C ad F. Invertendo igitur erit BX ad A, ut F ad C, ac proinde *b* B ad A in minori ratione erit, quàm F ad C.

o Per *axio. ante* 1. *l.* 5.
a Per 10. *l.* 5.
b Per 8. *l.* 5.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 17. *SI A habet ad B majorem rationem, quàm C ad F, etiam permutando A ad C majorem rationem habebit, quàm B ad F.*

Quoniā ratio A ad B ponitur major ratione C ad F, erit

F, erit *o* ratio A ad aliam BX (quæ neceſſariò *o Per axio.*
major eſt, quàm *a* B) æqualis rationi C ad F. Jam *ante 1. l. 5.*
igitur *b* permutando A erit ad C, ut BX ad F. *a Per 10.*
Sed BX ad F eſt in majori ratione, *c* quàm B ad *l. 5.*
F. Ergo etiam A eſt ad C in majori, quàm B *b Per 16.*
ad F. *l. 5.* *c Per 8.*
Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione *l. 5.*
minori:

PROPOSITIO XXVIII.

SI AB ad BC majorem rationem habet, quàm FI ad IL etiam componendo AC, ad BC majorem rationem habet, quàm FL ad IL. *Fig. 18.*

Quoniam ponitur AB ad BC eſſe in majori *o Per axio.*
ratione, quàm FI ad IL. Ergo *o* alia OB (quæ *ante 1. l. 5.*
neceſſariò erit minor, *a* quàm AB) eſt ad BC, *a Patet ex*
ut FI ad IL. Ergo *b* componendo OC eſt ad *10. l. 5.*
BC, ut FL ad IL. Ergo AC eſt ad BC in *c* *b Per 18.*
majori, quàm FL ad IL. *l. 5.*
Idem ſimiliter demoſtrabitur de proportione minori. *c Per 8. l. 5*

PROPOSITIO XXIX.

SI AC ad BC majorem rationem habet, quàm FL ad IL, etiam dividendo AB ad BC majorem habet rationem, quàm FI ad IL. *Fig. 18.*

Quia ponitur AC ad BC majorem habere ra-
tionem, quàm FL ad IL. Ergo *o* alia OC (quæ *o Per axio.*
neceſſariò minor erit, *a* quàm AC) erit ad BC, *ante 1. l. 5.*
ut FL ad IL. Jam igitur erit dividendo *b* OB ad *a Per 10.*
BC, ut FI ad IL. Ergo AB eſt ad BC in majori, *l. 5.*
quàm FI ad IL. *b Per 17.*
Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione *l. 5.* *c Per 8.*
minori. *l. 5.*

PROPOSITIO XXX.

Fig. 18. *SI AC ad BC majorem rationem habet, quàm FL, ad IL convertendo habebit AC ad AB minorem, quàm FL ad FI.*

Quoniam AC eſt ad BC in majori, quàm FL ad IL, erit dividendo *a* AB ad BC in majori, quàm FI ad IL. Ergo invertendo *b* CB ad BA eſt in minori, quàm LI ad IF. Ergo componendo *c* CA eſt ad BA in minori, quàm LF ad IF.

a Per 29. *l.* 5. *b* Per 26. *l.* 5. *c* Patet ex 28. *l.* 5.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 19. *SI AB ad C majorem rationem habeat, quàm F ad I, & C ad LQ majorem rationem habeat, quàm I ad S, & ſic deinceps, etiam prima AB ad ultimam LQ majorem rationem habebit, quàm prima F ad ultimam S.*

Quoniam AB eſt ad C in majori, quàm F ad I. Ergo alia *o* quæpiam OB (quæ neceſſariò minor *a* erit, quàm AB) eſt ad C, ut F ad I. Et quia C eſt ad LQ in majori, quàm I ad S. Ergo C ad aliam quampiam LR (quæ erit neceſſariò major, quàm LQ) eſt, ut I ad S. Igitur ex æquo *c* OB eſt ad LR, ut F ad S. Ergo OB eſt ad LQ in majori, quàm *d* F ad S. Ergo AB eſt ad LQ *e* in multo majori, quàm F ad S.

o Per axio. *a* Per 10. *l.* 5. *c* Per 22. *l.* 5. *d* Per 8. *l.* 5. *e* Per eand.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

SI AB ad C majorem rationem habet, quàm I ad S; & C ad LQ majorem, quàm F ad I, etiam ex æquo habebit majorem rationem AB ad LQ, quàm F ad S. *Fig. 19.*

Demonſtratio eadem, quæ præcedentis, ſed pro 22. citetur 23.

PROPOSITIO XXXIII.

SI tota (AB) ad totam (FI) majorem rationem habuerit, quàm ablata (CB) ad ablatam (LI), tota ad totam minorem rationem habebit, quàm reliqua (AC) ad reliquam (FL.) *Fig. 12.*

Quia AB eſt ad FI in majori, quàm CB ad LI, erit *a* permutando etiam AB ad CB in majori, quàm FI ad LI. Ergo convertendo *b* AB eſt ad AC in minori, quàm FI ad FL. Ergo etiam permutando *c* AB eſt ad FI in minori, quàm AC ad FL. *a Per 27. l. 5.* *b Per 30. l. 5.* *c Patet ex 27. l. 5.*

PROPOSITIO XXXIV.

SI rationes (A ad C, & E ad O) ſunt ęqualium rationum (A ad B, & E ad F) duplicatę, aut triplicatæ, & ſic deinceps, æquales ſunt etiam ipſæ. *Fig. 20.*

Quia ratio A ad C duplicata eſt rationis A ad B, erit *a* ut A ad B, ſic B ad C. Ob eandem cauſam erit *a Per def. 10.*

ut E ad F, ſic *F* ad O. Cum ergo ſit ut A ad B, ſic per hyp. E ad F; & ut B ad C, ſic F ad O (nam ut B ad C, ſic A ad B, hoc eſt E ad F, hoc eſt F ad O,) igitur *b* ex æquo erit ut A ad C, ſic E ad O.

b Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 20.

SI rationes æquales A ad C, & E ad O ſint duplicatæ, aut triplicatæ, & ſic deinceps rationum A ad B, & E ad F, etiam hæ æquales erunt.

Si negas, ſit ut A ad B, ſic E ad aliam Z inæqualem ipſi F, & fiat ut E ad Z, ſic Z ad X. Quoniam igitur rationum æqualium A ad B, & E ad Z duplicatæ *c* ſunt rationes A ad C, & E ad X, etiam ratio E ad X æqualis erit *d* rationi A ad C: hoc eſt per hyp. rationi E ad O. Ergo *e* æquantur O, & X. Ergo patet etiam medias F, & Z æquales eſſe. Ergo A eſt ad B, ut E ad F, ſeu Z. Quod erat demonſtrandum.

c Per defin. 10. l. 5.
d Per præc.
e Per 9. l. 5.

Ex contradictorio aſſertionis directè illata eſt aſſertio.

PARS

PARS SECUNDA.

Euclidæa per multiplices definitio æqualium rationum demonſtratur, exhibeturque, ac demonſtrabitur aliud magis immediatum, & facilius indicium æqualitatis rationum.

PRoportionum elementis methodo (niſi fallor) commodiori explicatis, reliquum eſt, ut quod ſecundo loco ſuprà promiſeram, præſtare aggrediar. Hoc igitur loco (quod à nullo hactenus factum eſt, demonſtrabimus; nihil aſſumendo, niſi quod per ſe lumine naturali ſit manifeſtum, duas rationes inter ſe æquales eſſe, quando antecedentium quælibet æquè multiplices conſequentium æquè multiplicibus ſemper ſunt vel pariter majores, vel pariter minores, vel pariter æquales. Cujus quidem negotii cùm ſatis ardua, atque prolixa ſit demonſtratio, ut jam reipſa cognoſcemus, facilè apparebit, præpoſterè egiſſe Euclidem, qui æqualitatis rationum primum, & fundamentale indicium ſumi voluit ex hac multiplicium indemonſtrata hactenùs proprietate, cujus tàm remota, & obſcura ſit cum rationum æqualitate connexio.

Lemma I.

SIt A ad B, ut C ad F; & ſint antecedentium A, C quælibet æquè multiplices I, Q nimirùm vel duplæ, vel triplæ, & ſic deinceps. Sint item conſequentium B, F quælibet æquè multiplices L, R. Fig. 21.
Erit quoque ut I ad L, ſic Q ad R.

Quoniam enim A eſt ad B, ut C ad F, etiã I dupla

ipſius A ad B, ut Q dupla ipſius C eſt ad F: & I tripla A erit ad B, ut Q tripla C ad F. Et ſic in infinitum. Quod quidem æquè eſt per ſe clarum, ac quodlibet axioma. Quoniam igitur I eſt ad B, ut Q ad F, erit quoque I ad L duplam ipſius B, ut Q ad R duplam ipſius F; & ut I ad L triplam ipſius B, ita Q ad R triplam F; Et ſic in infinitum, quod rursùs tàm clarum eſt, quàm axioma quodcunque. Liquet ergo propoſitum.

Lemma 2.

fig. 22. *SI quantitates A, B habeant communem menſuram C, erit A toties ſumpta, quoties eſt C in B, æqualis quantitati B toties ſumptæ, quoties C eſt in A.*

Ponatur C contineri in B quater, & in A ſexies, ac proinde B eſſe 4 C, & A eſſe 6 C. Igitur 6 C (hoc eſt A) ducta in 4 C (hoc eſt toties ſumpta, quoties C eſt in B) efficiunt 24 C. Similiter 4 C (hoc eſt B) ducta in 6 C (hoc eſt toties ſumpta, quoties C eſt in A) efficiunt etiam 24 C. Ergo A toties ſumpta, quoties C in B, æquatur B toties ſumptæ, quoties C in A.

Theorema 1.

23. *SI ratio AB ad FI major ſit ratione L ad R, tales ſumi poſſunt antecedentium (AB, & L) æquè multiplices, tales item æquè multiplices conſequentium (FI, & R,) ut multipla antecedentis AB rationis majoris excedente multiplam conſequentis (FI), multiplex antecedentis L rationis minoris non excedat multiplicem ſui conſequentis (R.)*

Sit ratio AB ad FI major ratione L ad R, & ſint AB, & L majores rationum termini. Quoniam igitur AB,

tur AB ad F I majorem habet rationem, quàm L ad R; alia quædam quantitas Z a habebit ad FI eandem rationem, quam L ad R. Quia jam igitur ratio Z ad F I æqualis eſt rationi L ad R, poniturque ratio AB ad F I major ratione L ad R, erit quoque ratio AB ad F I major ratione Z ad F I, ac proinde AB major eſt, quàm Z : quæ omnia per ſe ſunt manifeſta . Igitur ex AB ſumi poterit AC par Z : eritque etiam AC ad FI, ut L ad R. Auferatur reſiduum BC ex AC quoties poteſt, puta ter; tùm ſeca AC in tot æquales partes ex. gr. in 6. donec earum una poſſit auferri ſæpiùs ex F I, quàm B C ex AC puta quater, & reſiduum eſto O I, quod erit minus una particula . Hoc quoque fieri poſſe per ſe eſt manifeſtum, & patet ex p. 1. l. 10. quæ à proportionibus non dependet. Particularum verò illarum quantitas eſto Q.

a Per axiõte 1. l. 5.

Quoniam igitur Q eſt menſura communis quantitatum AC, FO, ergo AC toties ſumpta, quoties Q eſt in FO, nempè quater, æquatur F O toties ſumptæ, quoties Q eſt in AC, nempè ſexies. Deinde quia reſiduum O I eſt minus una particula, hoc eſt, quàm Q, erit O I toties accepta, quoties Q eſt in AC, nempè ſexies, adhuc minor, quàm AC . Ulteriùs, quia BC minus ſæpè auferri poteſt ex AC, quàm Q ex FI (poſitum quippe fuit BC ex AC auferri tantùm poſſe ter, Q verò quater ex FI,) manifeſtum eſt, BC toties ſumptum, quoties Q in F I, nempè quater, majus fore, quàm AC, ac proinde multò majus eſſe, quàm O I ſumptum ſexies, quod oſtendi ſuprà eſſe minus, quàm AC . Atqui oſtenſum eſt AC ſumptum quater, & F O ſumptum ſexies eſſe æqualia. Quare ſi AC ſumpto quater addatur BC quater, & ad FO ſexies ſumptum addatur O I ſexies, erunt 4 AC &

 4 BC,

4. BC, hoc eſt 4. AB majora, quàm 6. FO, & 6. OI, hoc eſt quàm 6. FI. Quia verò 4. AC æqualia erant 6. FO, erunt 4. AC minora 6. FI. Sed ut AC ad FI, ita ponebatur ſuprà L eſſe ad R. Ergo per lem. 1. etiam 4. L minora ſunt quàm 6. R. Acceptę ſunt igitur antecedentium AB, & L æquè multiplices, nempe quadruplæ, item æquè multiplices conſequentium FI, & R, nempè ſecuplæ, & tamen oſtenſum eſt multiplam antecedentis AB (nempè 4. AB) ſuperare multiplicem conſequentis FI (nempè 6. FI:) multiplicem verò antecedentis L (nempè 4. L) non excedere multiplicem conſequentis R (nempè 6. R.) Quod erat demonſtrandum.

Theorema 2.

Fig. 21 *SI antecedentium (A, C) quælibet æquè multiplices quibuslibet conſequentium (B, F) ęquè multiplicibus ſint vel ſimul majores, vel ſimul minores, vel ſimul æquales, ratio (A ad B) rationi (C ad F) æqualis erit.*

Si negas, ſit ratio A ad B major ratione C ad F. Ergo per theor. præc. poterunt antecedentium A, C ſumi tales æquè multiplices, item tales conſequentium B, & F æquè multiplices, ut multipla antecedentis A excedente multiplam conſequentis B, multipla antecedentis C non excedat multiplam conſequentis F, quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim. Ergo &c.

In hac demonſtratione, uti & in ſequentibus, eæ ſolùm propoſitiones ex quinto libro adhibentur, quæ per ſe ęquè ſunt manifeſtæ, atque ipſa axiomata.

Theo-

Theorema 3.

SI ſumi poſſint antecedentium (O, R) tales æquè multiplices, itemque tales æquè multiplices conſequentium (Q, S,) ut multipla antecedentis unius (O) ſuperante multiplam conſequentis (Q,) multipla antecedentis alterius (R) non excedat multiplam ſui conſequentis (S,) erit ratio (O ad Q), cujus antecedentis multiplex ſuperat multiplicem conſequentis, major ratione altera (R ad S .) Fig. 24.

Rationes illas inæquales eſſe ſic oſtendo. Si eſſent æquales, quæcumque antecedentium æquè multiplices (ut patet à fortiori ex lemmate primo) quibuſcunque æquè multiplicibus conſequentium, vel ſimul majores eſſent, vel ſimul minores, quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim.

Quòd autem ratio O ad Q major ſit, cujus antecedentis muliplex ſuperat, ſic oſtendo. Si negas, ſit ratio R ad S major ratione O ad Q. Ergo per theor. 1. tales accipi poſſunt antecedentium R, & O æquè multiplices, talesque item æquè multiplices conſequentium S, & Q, ut multipla antecedentis R rationis majoris excedente multiplam conſequentis S multipla antecedentis O non excedat multiplam conſequentis Q; non autem tales, (quod facilè ex 1. lem. oſtend.) ut multipla O excedente multiplam Q multipla R non excedat multiplam S. Quod eſt abſurdum, cum evertat hypotheſim.

Theorema 4.

CUm proportio irrationalis eſt, nulla multiplex antecedentis ulli conſequentis multiplici æ- Fig. 25.

qualis eſſe poteſt. Quare, cùm per multiplices inquiritur proportionum irrationalium æqualitas, ſolummodò multiplicium ſimultaneus exceſſus, defectuſque ſpectari debent.

Fig. 25. *Sit proportio irrationalis A ad B. Si A aliquoties ſumpta poſſet fieri æqualis B aliquoties ſumpta, ac proinde eandem ambæ efficere quantitatem Z, ſingulæ A, & B eſſent eidem Z commenſurabiles, ac proinde & commenſurabiles inter ſe, contra hypoteſim.*

Quia tamen ſecundum theorema tàm ad rationales proportiones pertinet, quàm ad irrationales, ſimultaneo exceſſui, & defectui æqualitatem ſimultaneam addidimus cum Euclide.

Demonſtratis hunc in modum, quæ ab Euclide def. 5. & 6. ponuntur, jam omnes ejus quinti, & ſexti libri demonſtrationes ſubſiſtunt, patetque, multiplicium illum exceſſum, defectumque ſimultaneum infallibile indicium eſſe æqualitatis rationum, non quidem per ſe immediatè; ſed demonſtratione, quam modò dedimus, priùs ritè intellecta.

Verùm, quia indicium per multiplices quantumvis jam ſecurum, nihilominus remotum eſt, & implexum, hìc aliud clariſſimum, & proximum, quod promiſi ſuprà, demonſtrabo.

Theorema 5.

Fig. 26. *SI conſequentes (CF, NQ), & conſequentium quælibet aliquotæ ſimiles (puta & decimæ, & centeſimæ, & milleſimæ, & ita deinceps ſine termino) in antecedentibus (AB, GM) æquali ſemper numero contineantur, rationes (AB ad CF, & GM ad NQ) æquales erunt.*

Nota, æquali numero contineri dicuntur, cùm, ſi

aufe-

auferantur quoties poſſunt, æqualis eſt utrimque numerus ablatarum.

Demonſtr. Si negas, erit ratio alterutra, puta A B ad C F, major ratione G M ad N Q. Quoniam igitur A B ponitur ad CF majorem habere rationem, quàm G M ad N Q, manifeſtum eſt, aliquam (puta A D) minorem, quàm A B æqualem habere rationem ad C F, quàm G M ad N Q. Manifeſtum ſimiliter eſt, aliquam ipſius B F aliquotam (ex. gr. unam trigeſimam) eſſe minorem differentia DB. Sit CE una trigeſima ipſius CF, & auferatur ex A B quoties poteſt ex. gr. millies, totumque ablatum ſit A O. Quoniam igitur A O eſt 1000 C E, & C F eſt 30 C E, erit A O ad C F, ut 1000. ad 30.

Sumatur jam ex N Q aliquota N P ſimilis alteri C E, nempè etiam una trigeſima. Quoniam ex hyp. C E, N P æquali numero in A B, G M continentur, & C E ablata ex A B quoties potuit, ablata fuit millies, etiam N P ex G M auferri poterit millies. Quia ergo totum ablatum G K eſt 1000 N P, & N Q eſt 30 N P, erit G K ad N Q, ut 1000. ad 30. hoc eſt ut A O ad C F. Quia verò C E ablata ex A B quoties potuit, reliquit O B, erit O B minus, quàm C E. Sed C E, nempè una trigeſima C F, eſt minor poſita quàm D B. Ergo O B eſt multò minor, quàm DB. Ergo A O eſt major, quàm A D. Ergo A O ad CF majorem rationem habet, quàm A D ad CF. Sed ponebatur eſſe A D ad CF, ut G M ad N Q. Ergo A O ad CF majorem rationem habet, quàm G M ad N Q; hoc eſt multò majorem, quàm G K ad N Q. Quod eſt abſurdum, quia oſtendi ſuprà A O eſſe ad C F, ut G K ad N Q. Non poſſunt igitur rationes datæ A B ad C F, & G M ad N Q eſſe inæquales. Æquales igitur ſunt. Quod erat demonſtrandum.

Theore-

Theorema 6.

Fig. 26. *SI aut conſequentes (C F , N Q), aut conſequentium aliquæ ſimiles aliquotæ (exemp. gr. decimę) inęquali numero in antecedentibus (A B , GM) contineantur, rationes (A B ad CF, & G M ad N Q) inæquales erunt, & erit illa major, cujus conſequentis aliquota ſæpiùs continetur.*

Contineatur C E decima una ipſius C F in A B millies, & ſit A O 1000 CE; tum vero reſiduum O B erit minus, quàm una C E. Deinde N P una decima N Q contineatur in G M tantùm nongentes nonagies ſepties, & ſit GK 997 N P; patet reſiduum K M fore minus una N P, ac proinde 1000 N P fore majores, quàm G M. Sit ergo G R 1000 N P. Quoniam igitur A O eſt 1000 C E, & GR 1000 N P; CF verò 10 C E, & N Q 10 N P, erit A O ad CF, ut G R ad N Q. Ergo A B eſt ad C F in majori ratione, quàm G R ad N Q; ac proinde in multo majori, quàm G M ad N Q. Quod erat demonſtrandum.

Habemus jam igitur indubitatum, facillimũque indicium, ex quo rationes æquales, inæqualeſque certò liceat diſcernere. Et poſſemus ex illo omnes, quæ quidem axiomata non ſint, lib. 5. propoſitiones, quas per multiplices Euclides demonſtrat, multò expeditiùs demonſtrare, niſi magis ex uſu diſcentium putaremus, illas ea methodo, qua in prima parte uſi jam ſumus, proponere.

TER-

TERTIA PARS.

De proportionum denominatoribus, algorythmo, compoſitione.

I.

Proportionis Diviſio.

Prima diviſio eſt in rationalem, & irrationalem, ut dictum def. 4. utraque dividitur in rationem æqualitatis, & inæqualitatis. Ratio inæqualitatis dividitur in rationem majoris inæqualitatis, quæ habet antecedens majus conſequente, & in rationem minoris inæqualitatis, quæ habet antecedens minus conſequente.

Rationalis proportio inæqualitatis majoris dividitur in quinque ſpecies, quæ ſunt; multiplex, ſuperparticularis, ſuperpatiens, multiplex ſuperparticularis, multiplex ſuperpatiens.

Ratio multiplex eſt, quando major minorem aliquoties continet, ut bis, ter, quater, &c. diciturque ratio dupla, tripla, quadrupla.

Ratio ſuperparticularis eſt, quando major minorem continet ſemel, & unam ejus partem aliquotam: ut ratio 3. ad 2, vel 6 ad 4. quæ dicitur ſeſquialtera, quia major minorem continet ſemel, & ejus dimidium; ratio 4 ad 3, ſive 16 ad 12, quæ dicitur ſeſquitertia, quia major minorem continet ſemel, & tertiam ejus partem, & ſic deinceps.

Ratio ſuperpatiens eſt, cùm major minorẽ continet

net ſemel, & plures ejus aliquotas non conficientes unam aliquotam. Talis eſt ratio 8 *ad* 5. *vel* 14 *ad* 10, *quia* 8 *continet* 5 *ſemel, & inſuper* 3. *hoc eſt tres quintas ejuſdem numeri* 5. *quæ tamen ſimul ſumptæ non conficiunt unam aliquotam ipſius* 5. *Similiter* 14 *continet* 10 *ſemel, & bis* 2. *hoc eſt duas quintas numeri* 10, *quæ tamen ſimul ſumptæ (nempè* 4*) non conficiunt unam aliquotam ipſius* 10. *Additur porrò,* non conficientes unam aliquotam, *quia aliàs eſſet ratio ſuperparticularis.*

Ratio multiplex ſuperparticularis eſt, cùm major minorem aliquoties continet, & inſuper unam ejus aliquotam, ut ratio 5. *ad* 2. 10 *ad* 4. *&c.*

Ratio multiplex ſuperpatiens eſt, cùm major minorem aliquoties continet, & adhuc plures ejus aliquotas non conficientes unam aliquotam, ut ratio 8 *ad* 3. 16. *ad* 6 *&c.*

II.

De Denominatore Proportionis rationalis.

DEnominator proportionis rationalis eſt, qui diſtinctè, & clarè exprimit habitudinem unius numeri ad alterum; ſive qui ita ſe habet ad unitatem, ut majus ad minorem, ac proinde oſtendit, quoties major minorem contineat, & quoties minor contineatur à majore. Rationis 27 *ad* 9 *denominator eſt* 3. *quia ita eſt ad unitatem, ut* 27 *ad* 9. *ac proinde oſtendit quoties conſequens in antecedente continetur, nempè ter.*

cujuſ-

Cujuſcumque rationis denominator invenitur, ſi major terminus dividatur per minorem, nam quotiens diviſionis erit denominator. Ratio eſt, quia quotiens ita eſt ad unitatem, ut dividendus ad diviſorem, hoc eſt ut major ad majorem.

Exempl. detur ratio 60. ad 6. Divide 60 per 6. quotiens 10 eſt denominator. Detur rursùm ratio 60 ad 16. diviſo 60. per 16. fit quotiens $3\frac{1}{4}$, *hic eſt denominator.*

III.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

CUm rationes irrationales fuerint reductæ ad rationes commune conſequens habentes, communis conſequentis antecedentia erunt rationum denominatores, & commune conſequens munus, ac locum explet unitatis.

Proportionis nullius irrationalis, ſi ſola ſit, exhiberi poteſt denominator. At ſi duæ fuerint, vel plures proportiones irrationales, alio quodam ſenſu earum denominatores poterunt exhiberi, qui nimirùm oſtendant, quomodo una ratio ad alteram ſe habeat. Id quod egregiè obſervavit P. Gregorius à S. Vincentio operis ſui Geometrici l. 8. def. 2. Qui vir cùm præclariſſimis, & propè innumeris inventis Geometriam auxit, tùm in primis l. 8. ejuſdem operis de proportionalitatibus ita ſcripſit, ut novam de proportionalitatibus ſcientiam condidiſſe cenſeri meritò debeat. Datæ ſint rationes irrationales A ad B, & C ad D, quæ revocentur ad rationes F H, G H habentes commune conſequens H ſic, ut ratio F ad H ſit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H; commune conſequens H munus Fig. 27.

ex-

explebit unitatis, & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H, & G ad H (hoc eſt rationum A ad B, & C ad D,) quia oſtendunt quomodo una ratio ſeſe habeat ad alteram; ſicuti enim F eſt ad G, ita ratio F H eſt ad rationem G H, hoc eſt ratio A B ad rationem C D.

I V.

Axiomata.

Fig. 28. *AX. 1. Rationes (F ad H, & G ad H) commune habentes conſequens (H) eam inter ſe proportionem habent, quam antecedentia (F, G.) eſt prop. 2. P. Gregorii à S. Vinc. l. 8. quadr.*

Fig. 29. *Hoc eſt, ratio G ad H tantò major eſt ratione F ad H, quanto G major eſt, quàm F.*

Ax. 2. Rationes (I ad L, & I ad M) commune habentes antecedens reciprocam inter ſe habent conſequentium proportionem. Eſt propoſ. 7. P. Gregorii à S. Vinc. l. 8. quadr.

Hoc eſt, ratio I ad L eſt ad rationem I ad M, ut reciprocè eſt M conſequens ad conſequens L: ſive ratio I ad L tantò major eſt ratione ejuſdem I ad M, quantò L fuerit minor, quàm M, ac proinde quantò M fuerit major, quàm L.

Ax. 3. Rationes rationales eam inter ſe rationem habent, quam denominatores. Patet ex axiom. 1.

Dentur ratio 12. ad 3. & ratio 15. ad 6. quarum
a Num. 2. *denominatores ſunt 4. & $2\frac{1}{2}$. Ex defin. a denom. ratio 12. ad 3. eſt eadem cum ratione 4. ad 1. & ratio 15. ad 6. eſt eadem cum ratione $2\frac{1}{2}$ ad 1. Sed*
b Per ax. 1. hic. *ratio 4. ad 1. eſt ad rationem $2\frac{1}{2}$ ad 1. ut b 4. eſt ad*

ad 2 $\frac{1}{2}$. Ergo etiam ratio 12. ad 3. eſt ad rationem 15. ad 6. ut denominator 4. eſt ad denominatorem 2 $\frac{1}{2}$.

V.

Rationum rationalium Additio, & Subtractio.

Additio perficitur, ſi rationum denominatores addantur. Ratio enim, quam habet denominatorum ſumma ad unitatem, eſt rationum datarum ſumma quæſita.

Dentur ratio 12. ad 3. & 15. ad 6. earum denominatores 4. & 2 $\frac{1}{2}$ additi ſibi mutuò faciunt 6 $\frac{1}{2}$ Ratio 6 $\frac{1}{2}$ ad 1 eſt par rationi 12. ad 3. & rationi 15. ad 6. Patet ex axio. 1. & 3. Fig. 30.

Subtractio fit ablatione minoris denominatoris à majore, nam ratio reſidui ad unitatem, eſt ratio, quæ remanet poſt minorem rationem à majori detractam. Patet ex axiom. 1. & 3.

Dentur rationes 12. ad 3. & 15. ad 6. Harum denominatores ſunt 4. & 2 $\frac{1}{2}$ Aufer minorem 2 $\frac{1}{2}$ à majori 4. remanent 3 $\frac{1}{2}$: ratio $\frac{1}{2}$ ad 1. eſt ea, quæ remanet, ubi rationem 15. ad 6. ſeu 2 $\frac{1}{2}$ ad 1. detraxeris ex ratioue 12. ad 3. ſeu 4. ad 1.

VI.

Rationum irrationalium Additio, & Subtractio.

Rationes datæ (A ad B, & C ad D) reducantur ad rationes (F ad H, & G ad H) habentes commune conſequens (H.) Antecedentia F, & G ſibi Fig. 31.

G ſibi addita ſunt F G. Ratio F G ad H eſt ſumma rationum F ad H, & G ad H, hoc eſt rationum A ad B, & C ad D. Patet ex axiom. 1.

Subtractio perficitur, ſi rationes datæ ad commune conſequens reducantur, ac tùm minus antecedens G auferatur à majori F; ratio enim reſidui ad H eſt ea, quæ remanet, poſtquàm rationem G ad H, ſeu C ad D ſubtraxeris à ratione F ad H, ſeu A ad B. Patet ex 1. axiom.

VII.

Rationum rationalium multiplicatio, & diviſio.

Fig. 32. *Denominatores rationum per invicem multiplicati dabunt denominatorem rationis, quæ ex datarum rationum multiplicatione producitur.*

Hoc eſt, ratio, quam ad unitatem habet numerus ex denominatorum multiplicatione productus, eſt ea, quæ fit ex rationum multiplicatione. Patet ex ax. 1. & 3. Nam multiplicatio rationum eſt unius ad alteram additio ſæpiùs repetita. Hanc autem perfici repetita ſæpiùs antecedentium additione (hoc eſt multiplicatione), patet ex jam citatis ax. 1. & 3.

Sint datæ rationes 9. ad 3. & 20. ad 4. denominatores 3. & 5. multiplicati faciunt 15. Ratio 15. ad 1. eſt ea, quæ ex multiplicatione rationum 9. ad 3. (ſeu 3. ad 1.) & 20. ad 4. (ſeu 5. ad 1.) producitur.

Diviſio rationum perficitur, ſi denominator majoris dividatur per denominatorem minoris. Nam ratio quotientis ad unitatem eſt ea, quę habetur ex diviſione rationis datæ majoris per rationem minorem. Patet ex 1. & 3. axiomate. Cùm rationis per rationem diviſio ſit ſubtractio unius ab altera ſæpiùs repetita.

VIII.

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

D*Atæ ſint rationes A ad B, & C ad D per invicem multiplicandæ. Fiat ut A ad B, ita D ad E. Ratio C ad E eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D.* Fig. 33.

Hæc operatio eſt Gregorii à S. Vincentio l. 8. prop. 75. Sed eam nec ipſe, nec alius quiſquam demonſtrat.

Hunc igitur in modum demonſtrabitur. Ratio C ad E producitur ex multiplicatione rationum C ad D, & D ad E, ut patebit ex demonſtratione numeri XII. ab his independente. Sed rationes C ad D, & D ad E per conſt ſunt rationes C ad D, & A ad B. Ergo ratio C ad E eſt ea, quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Quod erat demonſtrandum.

IX.

Diviſio rationum irrationalium.

D*Ata ſit ratio C ad E dividenda per rationem A ad B. Fiat ut A ad B, ſic C ad D. Ratio D ad E eſt quotiens.* Fig. 33.

Nam ratio C ad D (hoc eſt per conſt. ratio A ad B) multiplicata per rationem D ad E producit rationem C ad E, ut patebit ex demonſtratione num. XII. ab his independente. Ergo ratio D ad E eſt quotiens, cùm multiplicata in diviſorem, qui eſt ratio A ad B, reſtituat rationem C ad E, quæ proponebatur dividenda.

X.

De compoſitione rationum, ejus Definitio.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cùm rationum quantitates (hoc eſt denominatores) inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Eſt definitio 5. l. 6. Euclidis.

Fig. 34. *Dentur rationes quotcumque, quarum denominatores ſint* 2. 3. 1 $\frac{1}{4}$. *Multiplica denominatorem* 2. *per* 3 *denom. fit* 6 *denominator rationis compoſitæ ex rationibus, quarum denominatores ſunt multiplicati. Hoc eſt, ratio* 6 *ad* 1 *eſt compoſita ex rationibus* 6 *ad* 3, & 12 *ad* 4. *Quòd ſi denominatorem* 6 *multiplices per denominatorem tertium* 1 $\frac{1}{4}$, *fit* 7 $\frac{1}{2}$ *denominator rationis compoſitę ex tribus datis rationibus, quarum denominatores ſunt* 2, 3, 1 $\frac{1}{4}$.

XI.

Compoſitio rationum non aliud eſt, quàm rationum multiplicatio: & ratio omnis ex iiſdem rationibus componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

Nam, ut patet ex axiomatis num. 4. & ex num. 7. ratio, quæ ex plurium rationum multiplicatione producitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem, ſeu conſequens commune. Atqui etiam per definit. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus componitur, ea eſt, quam quantitas ex

denomi-

denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem, ſeu conſequens commune. Ergo ratio ex iiſdem componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

Scholium.

UT numeri ſequentis demonſtratio clariùs percipiatur, obſervandum eſt multiplicari, ac dividi magnitudines per invicem cum analogia quadam ad numeros. Quemadmodum igitur numerus per numerum multiplicari dicitur, cùm ut eſt unitas ad alterutrum, ita reliquus fit ad alium quempiam, qui productum dicitur, ita planè magnitudo per magnitudinem dicetur multiplicari, cùm ut quæpiam recta pro unitate aſſumpta ſe habet ad alterutram datarum, ita reliqua fiet ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Pari modo quemadmodum numerus per numerum dividi dicitur, quando ut unus eſt ad alterum, ita unitas fit ad alterum, qui quotiens nominatur: ita quoque magnitudo per magnitudinem dicetur dividi, quando aſſumpta quantitate aliqua pro unitate, ut una ſe habet ad alteram, ita unitas ad aliam, quæ proinde dicetur quotiens.

XII.

Si fuerint quæcunque, & quotcunque quantitates, ſeu magnitudines, ſeu numeri, ratio primæ ad ultimam componitur ex rationibus mediarum.

IN numeris demonſtratum eſt à Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonſtraret, nemo hactenùs inventus eſt. Unde Gregorius à S. Vincentio magnus Geometra l. 8. ad principium

ſecundum cenſet inter principia numerandum eſſe, donec alicui demonſtratio occurrerit, qua inter theoremata referri poſſit.

Univerſalem igitur hujus rei demonſtrationem dare conabimur hunc in modum.

Demonſtratur in magnitudinibus.

Fig. 35. *DAtæ ſint magnitudines quæcunque, & quotcunque A, B, C, D. Oſtendendum eſt, rationem A ad D componi ex rationibus A ad B, B ad C, C ad D.*

Fiat ut B ad C, ita X ad B. Eruntque rationes A ad B, B ad C reductæ ad rationes A ad B, X ad B habentes commune conſequens B, ac proinde rationum denominatores ſunt A, X, & conſequens commune B a munus explet unitatis, quæ eſt commune conſequens reſpectu omnium denominatorum numericorum.

a Per n. 3.

Itaque, ſi velimus magnitudines A, X per invicem multiplicare, oportebit b facere ut B unitas eſt ad X, ita A ad quartam Z, quæ erit productum multiplicationis A per X, ſeu X per A; planè ac ſi cupias invicem multiplicare numeros R, S, fit ut unitas ad unum numerum S, ita alter R ad quartum V, qui eſt productum multiplicationis.

b Scho'. præc.

Quoniam igitur quantitas Z eſt productum ex multiplicatione denominatorum A, X, erit ratio c hujus producti Z ad B unitatem, ſeu commune conſequens ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B, X ad B; prorsùs ut in rationum numericarum multiplicatione numero VII. oſtendimus venire, in qua, ſi denominatores inter ſe multiplicentur, ratio producti ad unitatem ea eſt, quæ fit ex rationum multiplicatione.

c Per def. num. 10.

Atqui

Atqui per conſtr. ratio X ad B eſt ratio B ad C, Ergo etiam ratio Z ad B producitur ex multiplicatione rationum A ad B, B ad C. Quia verò per conſtr. ut B eſt ad X, ita A eſt ad Z, etiam inverſim Z ad A, ut X ad B, hoc eſt per conſtr. ut B ad C. Igitur permutando ut Z eſt ad B, ita A eſt ad C. Sed jam oſtenſum, rationem Z ad B produci ex multiplicatione rationum A ad B, B ad C. Ergo etiam ratio A ad C producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & B ad C. Atqui num. XI. oſtenſum eſt, rationes componi ex iiſdem rationibus, ex quarum multiplicatione producuntur. Ergo ratio A ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C.

Eodem modo demonſtrabitur ratio A ad D componi ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D. Et ſic deinceps in infinitum. Quod erat demonſtrandum.

Demonſtratur in numeris.

Eandem prorſùs demonſtrationem valere in numeris jam oſtendam, unde etiam veritas illius, ac ſoliditas magis ſtabilietur.

	$\frac{8}{3}$	
8	3	$\frac{4}{3}$
4	1	
3	$\frac{3}{4}$	

Dati ſint tres numeri quicumque exem. gr. 8. 4. 3. Fiat ut 4 ad 8, ita 1 ad 2, & ut 4 ad 3, ſic 1 ad $\frac{3}{4}$. Erunt igitur rationes 8 ad 4, & 2 ad 1, item rationes 4 ad 3, & 1 ad $\frac{3}{4}$ inter ſe æquales; eritque ex æquo a etiam ratio 8 ad 3 æqualis rationi 2 ad $\frac{3}{4}$. a Per 22. l. 5.

 Fiat

	$\frac{8}{3}$	
8	2	$\frac{4}{3}$
4	1	
3	$\frac{3}{4}$	

Fiat deinde ut $\frac{3}{4}$ *ad* 1, *ita* 1 *ad* $\frac{4}{3}$; *eruntque rationes* 2 *ad* 1, *&* 1 *ad* $\frac{3}{4}$ (*hoc eſt rationes* 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3) *reductæ ad duas rationes* 2 *ad* 1, *&* $\frac{4}{3}$ *ad* 1 *habentes commune conſequens unitatem; ac proinde* 2, *&* $\frac{4}{3}$ *erunt* b *rationum* 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3 *denominatores. Multiplicentur jam per invicem denominatores* 2, *&* $\frac{4}{3}$ *hoc eſt fiat ut* 1 *ad* $\frac{4}{3}$, *ita* 2 *ad* $\frac{8}{3}$. *Erunt* $\frac{8}{3}$ *productum ex* 2, *&* $\frac{4}{3}$ *denominatoribus rationũ* 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3 *inter ſe multiplicatis. Ergo ratio hujus producti* $\frac{8}{3}$ *ad* 1 *eſt ea,* c *quæ producitur ex multiplicatione rationum* 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3. *Jam verò, quia per cõſtr. ut* 1 *eſt ad* $\frac{4}{3}$, *ita* 2 *eſt ad* $\frac{8}{3}$, *erit etiam inverſim* $\frac{8}{3}$ *ad* 2, *ut* $\frac{4}{3}$ *ad* 1. *Sed rursùm per cõſtr.* $\frac{4}{3}$ *ſunt ad* 1, *ut* 1 *ad* $\frac{3}{4}$. *Ergo* $\frac{8}{3}$ *ſunt ad* 2, *ut* 1 *ad* $\frac{3}{4}$. *Ergo permutando* $\frac{8}{3}$ *ſunt ad* 1, *ut* 2 *ad* $\frac{3}{4}$. *Sed jam oſtendi rationem* $\frac{8}{3}$ *ad* 1 *eſſe eam, quæ producitur ex multiplicatione rationum* 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3. *Ergo etiam ratio* 2 *ad* $\frac{3}{4}$ *eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum* 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3. *Sed oſtenſum eſt ſuprà, rationem* 2 *ad* $\frac{3}{4}$ *parem eſſe rationi* 8 *ad* 3. *Ergo etiam ratio* 8 *ad* 3 *producitur ex multiplicatione rationum* 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3. *Igitur per num. XI. ratio* 8 *ad* 3 *ex rationibus* 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3 *compoſita eſt. Q. e. d.*

b *Patet ex num.* 2.

c *Patet ex num.* 7.

4
3
5
73

Eodem modo demonſtrabitur, ſi plures dentur numeri quàm tres, rationem 8 *ad* 25 *componi ex rationibus* 8 *ad tria*

(*hoc*

(hoc jam eſt ex rationibus 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3) *& ex ratione* 3 *ad* 25; *& rationem* 8 *ad* 73 *componi ex rationibus* 8 *ad* 25 *(hoc jam eſt ex rationibus* 8 *ad* 4, 4 *ad* 3, 3 *ad* 25) *& ratione* 25 *ad* 73. *& ſic in infinitum.*

XIII.

Si dentur quotcumque rationes A ad B, C ad D, E ad F, exhibebitur ratio ex omnibus compoſita. *Fig. 36.*

SI fiat ut A ad B, ita quæpiam G ad H, & ut C ad D, ita H ad I, & ut E ad F, ita I ad K. ratio enim G ad K erit compoſita ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K, ut num. præced. demonſtravimus, hoc eſt per conſtr. ex rationibus datis A ad B, C ad D, E ad F.

XIV.

Ratio non eſt æqualis rationibus, ex quibus componitur.

INter duas quantitates G, K aliæ quantitates interponantur, ſive illæ ſint continuè proportionales, ſive non: ratio primę G ad ultimam K non eſt æqualis rationibus intermediis G ad H, H ad I, I ad K, licet ex iis ſit compoſita. Nam ex iis componi idem eſt, quod produci ex earum multiplicatione mutua, ut oſtenſum eſt num. XI. Cùm igitur ratio G ad K ſit producta ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K inter ſe multiplicatis, ut ex demonſtratione num. XII. patet, non poſſunt rationes G ad H, H ad I, I ad K ſimul ſumptæ æquales eſſe rationi G ad K, niſi cum per accidens rationum additio, & *Fig: 36.*

multiplicatio eandem effecerint rationem. Ut igitur rationibus dictis habeatur una æqualis, erunt illæ ſibi mutuò addendæ, ut traditur num. V, & VI; ex qua additione proveniet ratio illis omnibus æqualis, quæ ferè ſemper, ut dixi, erit diverſa ab illa, quæ ex earundem rationum compoſitione, hoc eſt multiplicatione exſurget.


5.
E F
C


C
29.
M
D

ELEMENTORVM
GEOMETRIÆ
LIBER SEXTVS.

PRoportionum doctrina libro quinto univerſim expoſita in ſexto figuris planis applicatur. Et ſunt, quæ hoc libro traduntur, adeò ſcitu neceſſaria, ut ſine illis arcana Geometriæ penetrare, fructuſque ſuaves Matheſeos percipere nemo poſſit. Ad propoſitiones propè ſingulas oporteret encomium texere, tanta omnium vtilitas eſt.

DEFINITIONES.

1 SImiles figuræ ſunt, quæ & ſingulos angulos ſingulis æquales habent, & latera, quę æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos exiſtunt, vel quæ ſunt circa æquales angulos (eòdem omnia recidunt) proportionalia.

Ut: triangula X, Z dicentur ſimilia, ſi angulus A ſit æqualis angulo F, & angulus B angulo I, & angulus C angulo L: atque inſuper ſi AB ſit ad FI, ut BC ad IL; & BC ad IL, ut CA ad LF; & CA ad LF, ut AB ad FI, comparando ſemper latera æqualibus angulis oppoſita. Eodem modo aliarum figurarum rectilinearum omnium ſimilitudo explicabitur. *Fig. 7. l. 6.*

2 Reciprocæ figuræ ſunt, cũ in utraque antece- *Fig. 29.*

cedentes, & conſequentes rationum termini fuerint.

Ut in parallelogrammis X, Z,

ſi AC ſit ad CB,

vt FC ad CL

antecedentia ſunt AC, & FC, quorum in vtraque figura unum eſt; & conſequentia ſunt CB, & CL, quorum ſimiliter in quaque figura unum eſt: parallelogramma proinde X, Z reciproca dicuntur. Idem de aliis figuris intellige.

Fig. 1. 3 Altitudo figuræ eſt perpendicularis à vertice ad baſim deducta. Eſt Euclidis 4.

Ut. Trianguli A B C altitudo eſt perpendicularis AQ à vertice cadens in baſim B C vel intra triangulum, vel extra in baſim potractam. Baſis autem, & vertex aſſumuntur ad libitum.

4 Similes arcus circulorum dicuntur, qui eãdem habẽt ad totas ſuas circũferentias rationem.

Ut, ſi ambo ſint ſuæ circumferentiæ pars tertia, vel quarta, &c.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 2. T*Riangula (ABC, DEF), & parallelogrãma (AOPC, DQRF), quæ eandẽ habẽt altitudinem, ſive inter eaſdẽ exiſtunt parallelas, eã inter ſe proportionem habent, quam baſes (AC, DF.)*

Ab hoc theoremate dependet totus ſextus liber, imò quidquid uſpiam de figuris ſive planis, ſive ſolidis per proportiones demonſtratum eſt. Demonſtrat illam Euclides per multiplices, quæ in primo ſtatim aditu hujus libri tyrones perturbant. Aliam igitur demonſtrationem

nem dabimus facillimam ex theor. 5. partis ſecundæ lib. 5. hunc in modum.

Sumatur baſeos DF quævis pars aliquota, ex. gr. DG una tertia, & ducatur recta GE, erit etiã triangulum DEG tertia pars trianguli DEF, vt colligitur ex 38. l. 1. Quare recta DG, & triangulum DGE ſunt conſequentium *a* ſimiles aliquotæ. Auferatur deinde DG ex baſi AC quoties poteſt, puta ſexies, ducanturque rectæ HB, IB, KB, LB, MB, NB. Quoniam CH, HI, &c. ęquales ſunt ſingulę ipſi DG, etiam ſex triangula CBH, HBI &c. triangulo DEG æqualia *b* erunt ſingula. Ergo quoties DG continetur in antecedente AC, toties triangulum DEG continetur in antecedente ABC. Eodem diſcurſu oſtendam, quaſcunque conſequentium (baſeos DF, & trianguli DEF) ſimiles aliquotas in antecedentibus (baſi AC, & triangulo ABC) æquali numero contineri. Ergo per theor. 5. partis ſecundæ lib. 5. ut baſis AC ad baſim DF, ita triangulum ABC ad triangulum DEF. Quod erat demonſtrandum.

a Per defin. 7. l. 5.

b Per 38. l. 1.

Quoniam verò parallelogramma AP, DR ſunt dupla *c* triangulorum ABC, DEF, etiam illa erunt inter ſe, ut baſes.

c Per 41. l. 1.

Corollarium.

Triangula (ABC, FIL), & parallelogramma æquales baſes (AC, FL), vel eandem habentia, eam inter ſe rationem habent, quam altitudines (BO, IQ.) *Fig. 3.*

Fiant enim QS, OR æquales æqualibus baſibus FL, AC. Erunt igitur etiam QS, OR inter ſe æquales. Duc SI, RB. Si in triangulis OBR,

QIS

QIS accipiantur BO, IQ tanquam baſes, erunt OR, QS eorum altitudines, quæ cùm ſint æquales, erunt triangula OBR, QIS inter ſe, ut *a* baſes BO, IQ. Sed quia ex conſtr. OR par eſt AC, & QS par FL, triangula OBR, QIS æquantur *b* triangulis ABC, FIL. Ergo etiam triangula ABC, FIL ſunt inter ſe, ut BO ad QI.

a Per 1. l. 6.
b Per 38. l. 1.

PROPOSITIO II.

Fig. 4.

SI ad unum trianguli latus (BC) ducta fuerit (FL) parallela, hæc ſecabit porportionaliter latera (hoc eſt AF erit ad FB, ut AL ad LC.)

Et ſi recta (FL) ſecuerit latera (BA, CA) proportionaliter, erit ad reliquum latus (BC) parallela.

Pars 1. Ducantur BL, CF. Quoniam FL ponitur parallela BC, erunt triangula FBL, LCF eandem baſim FL habentia inter *a* ſe æqualia. Ergo triangulum X ad utrumque eandem *b* habet rationem, hoc eſt triangul. X eſt ad triang. FBL, ut triangul. idem X eſt ad triang. LCF. Sed triangulum X eſt ad triang. FBL, ut *c* AF ad FB & triangulum X eſt ad triang. LCF, ut *d* AL ad LC. Ergo *o* etiam AF eſt ad FB, ut AL ad LC. Quod erat demonſtrandum.

b Per 37. l 1.
d Per 7. l. 5.
c Per prec.
d Per eăd.
o Per 11. l. 5.

Pars 2. Ut AF eſt ad FB, ita triangulum X *e* eſt ad triangulum FBL, & ut AL eſt ad LC, ita *f* triangulum X eſt ad triang. LCF. Sed jam ponitur AF ad FB, ut AL eſt ad LC. Ergo triang. X eſt *k* ad triang. FBL, ut idem X eſt ad LCF. Ergo *g* triangula FBL, LCF eandem habentia baſim æquantur. Ergo FL, BC *i* ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

e Per prec.
f Per eăd.
K Per 11. l. 5.
g Per 9. l. 5.
i Per 39. l. 1.

Corol-

Corollarium.

SI ad unum trianguli latus (BC) ductæ fuerint plures parallelæ (IO, FL), erunt omnia laterum ſegmenta proportionalia. Fig. 5.

Ducatur FQ parallela AC. Rectæ FS, SQ æquantur *o* LO, OC. Sed BI eſt ad IF, ut *b* QS ad SF. Ergo etiam BI eſt ad IF, ut CO ad OL. *o Per* 34. *l.* 1. *b Per* 2. *l.* 6.

PROPOSITIO III.

SI recta (BF) angulum trianguli bifariam ſecans etiam ſecet baſim (AC), habebunt baſis ſegmenta (AF, FC) eandem proportionem, quam reliqua latera (AB, CB.) Fig. 6.

Et ſi baſeos partes (AF, FC) eandem rationem habuerint, quam reliqua latera (AB, CB), recta (BF) baſim ſecans angulum oppoſitum (ABC) biſecabit.

Pars 1. Produc CB, donec BL ſit par BA, & junge AL. Quoniam in triangulo Z latera LB, AB æquantur, anguli *a* quoque L, & O æquales erunt. Quia igitur externus ABC duobus *b* internis L, O æqualis eſt; angulus I, qui per hyp. ipſius ABC dimidius eſt, æquabitur angulo L. Ergo AL, FB ſunt *c* parallelæ. Ergo in triangulo ACL, AF eſt ad FC, *d* ut LB (hoc eſt AB) ad BC. Quod erat demonſtrandum. *a Per* 5. *l.* 1. *b Per* 32. *l.* 1. *c Per* 29. *l.* 1. *d Per* 2. *l.* 6.

Pars 2. Produc iterùm CB, donec LB ſit par AB. Quoniam ponitur ut AF eſt ad FC, ita AB (hoc eſt LB) eſſe ad BC, erunt AL, FB *e* parallelæ. Ergo externus I eſt par *f* interno L, & alternus Q æqualis alterno *e Per* 2. *l.* 6. *f Per* 27. *l.* 1.

alterno O. Sed quia LB, AB æquales ſunt, anguli L, & O ſunt æquales. Ergo etiam I, & Q æquales ſunt, biſectus ergo eſt ABC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

o Def. 1. l. 6. *Triangula ſibi mutuò æquiangula ſunt ſimilia; hoc eſt, o etiam latera æqualibus angulis oppoſita habent proportionalia.*

Fig. 7. IN triangulis X, Z angulus A ſit par angulo F, & angulus C angulo L, & angulus B angulo I. Dico AB eſſe ad FI, ut AC ad FL; & AC eſſe ad FL, ut CB ad LI; & CB eſſe ad LI, ut BA ad IF.

Fig. 6. & 8 s Fig 8. ſola a Per 29 l. 1. b Per 2. l. 6. c Per 18. l. 5. Dem. Si angulus F ponatur ſupra ſibi æqualem A, latera FI, FL cadent ſupra latera AB, AC. Et quia *s* angulus externus AIL per hypoth. par eſt interno B, erunt *a* IL, BC parallelæ. Ergo *b* BI eſt ad IA, ut CL ad LA. Ergo *c* cōponendo BA eſt ad IF, ut CA ad LF. Quòd ſi angulus L imponatur angulo C, eodem modo oſtendam, AC eſſe ad FL, ut BC ad IL: & ſi angulus I, imponatur angulo B, oſtendetur pari modo, BC eſſe ad IL, ut AB ad FI. Liquet ergo propoſitum.

Corollaria.

Fig. 8. 1 SI in triangulo ducatur uni lateri (BC) parallela (LI), erit triangulum LFI ſimile toti CFB; ac proinde CF eſt ad LF, ut BC ad LI.

q Per 27. l. 1. Namquia LI, BC parallelæ ſunt, erunt *q* externi FIL, FLI pares internis B, & C; F verò utrique triangulo eſt communis. Ergo ſunt æquiangula. Ergo latera CF, LF oppoſita æqualibus

libus angulis B, & FIL ſunt *r* proportionalia lateribus BC, LI, quæ opponuntur communi angulo F. *r Per præc.*

2 Si in triangulo parallelas AC, LO ſecet recta BF ab angulo oppoſito B ducta ſecabit eas proportionaliter. *Fig.9.*

Nam per coroll. 1. AF eſt ad LI, ut FB ad IB; & FC quoque eſt ad IO, ut FB ad IB. Ergo AF eſt ad LI, ut *d* FC ad IO. Igitur permutando AF eſt ad FC, *e* ut LI ad IO. *d Per 11. l. 5.* *e Per 16 l. 5.*

PROPOSITIO V.

SI duo triangula habuerint omnia latera ſibi mutuò proportionalia, etiam ſibi mutuò æquiangula erunt. *Fig.10.*

Hoc eſt, ſi AB ſit ad RF, ut AC ad RQ; & ut AC ad RQ, ſic CB ad QF; & ut CB ad QF, ſic AB ad RF; dico angulos antecedentibus oppoſitos æquari angulis, qui opponuntur conſequentibus. Nimirùm C ipſi I, B ipſi F, A ipſi O.

Ang.	Antec.	Conſeq.	Ang.
C.	AB	RF	I
B	AC	RQ	F
A	CB	QF	O

Angulis A, & C fac æquales X, & Z, & latera coeant in N. Etiam igitur *b* B, & N æquales erunt. Quia ergo triangula P, T ſunt æqui angula, erit *o* AB ad RN, ut AC ad RQ. Sed ex hyp. etiam eſt AB ad RF, ſicut AC ad RQ. Ergo AB eſt ad RF, ut eadem AB ad RN. Ergo RN, RF *c* æquantur. Pari modo oſten- *b Per coroll. 9. p. 32. l. 1.* *o Per præc.* *c Per 9. l. 5.*

dam

dam æquari QN, & QF. Triangula igitur T,S ſibi mutuò ſunt æquilatera. Igitur anguli I, F, O æquantur *d* anguliſ Z, N, X, hoc eſt per conſtr. angulis C, B, A. Quod erat demonſtrandum.

d Per 8. l. 1.

PROPOSITIO VI.

Fig. 10.

SI *duo triangula (P S) habeant unum angulum (A) æqualem uni (O), & latera (AB, AC, RF, RQ), quæ æquales angulos continent, proportionalia, triangula erunt ſimilia.*

Angulis A, C fiant æquales X, Z, & latera coeant in N. igitur anguli quoque *e* B, & N æquales erunt. Oſtendam, ut in præcedenti, æquales eſſe RF, RN. Eſto verò RQ utriſque triangulis S, T communis. Anguli quoque O, & X æquales ſunt, quia æquantur ambo eidem A; X per conſtr. O per hyp. Ergo etiam I, & F *o* æquantur ipſis Z, & N. Triangulum igitur S æquiangulum eſt triangulo T; hoc eſt per conſtr. triangulo P. Ergo S, P *d* ſimilia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

e Per cor. 9. p. 32. l. 1.

o Per 4. l. 1.

d Per 4. l. 6.

PROPOSITIO VII.

V*Ix ullius eſt uſus.*

PROPOSITIO VIII.

I*N triangulo rectangulo perpendicularis (BC) ab angulo recto in baſim ducta ſecat triangulum in partes toti, & inter ſe ſimiles.*

In

In triangulis A B F, & L angulus F communis eſt anguli verò A B F, & X per hypotheſim ſunt recti, adeòque æquales. Ergo reliqui A, & O etiam *a* æquales erunt. Ergo *b* triangula A B F, & L ſimilia ſunt. Eodem modo ſimilia oſtendam eſſe triangula A B F, & R, angulumque I parem angulo F. Ex quo jam patet etiam R, & L ſimilia eſſe, cùm æquales ſint anguli I, & F: O, & A: V, & X. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 11.

a Per cor. 9. p. 32. l. 1.
b Per 4. l. 6.

Corollaria.

PRimo B C eſt media proportionalis inter A C, C F. Cùm enim ſint in triangulis R, & L.

æqu. ang.	I, F.	ęqu. ang.	A, O
lat. opp.	AC, CB	lat. opp.	CB, CF.

Patet *c* A C eſſe ad C B, ut C B eſt ad C F.

c Per 4. l. 6.

2 B F eſt media proportionalis inter A F, & C F. Item A B eſt media inter F A, & C A.

Nam in triangulis A B F, & L ſunt

æqu. ang.	A B F, X.	æqu. ang.	A, O.
lat. opp.	A F, B F.	lat. opp.	B F, C F.

Ergo A F eſt *d* ad B F, ut B F ad C F. Similiter, quia in triangulis A B F, & R ſunt.

d P. r eād

æqu. ang.	A B F, V	ęqu. ang.	F, I.
lat. opp.	A F, A B	lat. opp.	A B, A C

Erit rurſùm A F ad A B, ut A B ad A C.

PROPOSITIO IX.

D*Atam rectam* (*AB*) *dividere ſecundùm datam proportionem* (*F I ad I L.*)

Fig. 12.

Ducatur infinita A Z, ex qua ſume A Q, Q R æquales F I, I L, Ex R duc R B. Huic ex Q duc Q C

 paral-

parallelam. Dico factum.
Patet ex p. 2. l. 6.

PROPOSITIO X.

Fig. 13. *Datam rectam (AB) ſimiliter ſecare, ut altera data (AI) fuerit ſecta (in F, C.)*

Extremitates ſectæ, & inſectæ jungat recta IB. Huic ex punctis F, C duc parallelas rectę ſecandæ AB occurrentes in L, & Q. Dico factum.
Patet ex corollario p. 2. lib. 6.

Scholium.

Fig. 13. *Ex hac propoſitione diſcemus rectam datam in quotvis æquales partes ſecare. Cum recta ſecanda AB faciat quemvis angulum recta quæpiam infinita; ex qua circino cape tot æquales partes AC, CF, FI, in quot ſecare placuerit AB. Duc rectam IB, eique parallelas FL, CQ. Dico factum.*

Fig. 14. *Alter idem, & faciliùs efficiemus cum Maurolyco hunc in modum. Sit AB triſecanda. Duc ad AB parallelam IX infinitam ſupra, vel infra. Ex IX, ſi eſt infra AB, cape circino tres æquales partes IQ, QR, RS, quæ ſimul majores ſint quàm AB, minores vero, ſi IX eſt ſupra. Per I, & A, item per S, & B duc rectas, quæ concurrant in C. Ex C ad Q, & R ductæ rectę datam AB triſecabunt. Demonſtratio patet ex corollar. 2. prop. 4.*

Fig. 15. *Rurſum cum Maurolyco aliter idipſum ita obtinebimus. Sit quatriſecanda AB. Duc infinitam AX, eique parallelam BZ etiam infinitam. Ex his cape circino partes æquales AL, LO, OQ, & BV,*

& BV, VS, SR in ſingulis nempè una pauciores, quàm deſiderentur in AB, tum rectæ ducantur LR, OS, QV. Hæ quatriſecabunt datam AB.

Nam quia per conſtr. LO, RS parallelas, & æquales jungunt LR, & OS, etiam hæ erunt a parallelæ. Pari modo OS, QV ſunt parallelæ. Ergo cum AQ ſit ſecta in tres æquales partes, etiam erit AI ſecta b in tres æquales. Similiter erit BC ſecta in tres æquales, tota igitur AB ſecta eſt in quatuor æquales. a Per 33. l. 1. b Per cor. p. 2.

Hæ duæ praxes ſunt faciliores Euclidæa, quia pauciores ducendæ ſunt parallelæ.

PROPOSITIO XI.

Datis duabus rectis (AB, BC) tertiam proportionalem invenire. Fig. 16.

Duc rectam AC. Ex BA producta accipe AF parem BC. Per F ad AC duc parallelam FX infinitam, cui in L occurrat producta BC. Dico AB eſt ad BC, ut BC ad CL.

Nam AB eſt ad AF, *c* ut BC ad CL. Sed AF eſt *d* par BC. Ergo AB eſt ad BC, ut BC ad CL, adeoque CL eſt tertia proportionalis, quæ petebatur. c Per 2. l. 6. d Per conſt.

Aliter.

STatuantur AB, BC ad angulum rectum. Junge AC. Ex C duc CX perpendicularem ad AC infinitam, cui in L occurrat AB producta Dico AB eſt ad BC, ut BC ad BL. Patet ex coroll. 1. prop. 8. *hujus*. Fig. 17.

Scholium.

Poterit verò proportio data non ſolum per tres terminos, ſed etiam per infinitos continuari, & tota infinitorum proportionalium terminorum ſumma exhiberi. Pulcherrimè hanc rem, totumque adeò Geometricæ progreſſionis negotium Gregorius à S. Vincentio proſecutus eſt toto libro 2. ſui operis. Nos in gratiam ſtudioſorum ſuccinctam rei propoſitæ conſtructionem, ac demonſtrationem hìc exhibebimus.

Lemma 1.

Fig. 18. ſecunda. *Si ratio minoris inæqualitatis LO ad LR ſemper continuetur, venietur ad quantitatem quavis data majorem.*

a Per ſchol. p. 16. l. 5. *Sit LO ad LR, ut LR ad LQ, &c. Igitur a invertendo, ut QL ad RL, ſic RL ad OL. Ergo divid.* *b Per 17. l. 5.* *b QR ad RL, ut RO ad OL; & permut. c QR ad RO, ut RL ad OL. Sed RL eſt major, quàm OL.* *c Per 16. l. 5.* *Ergo etiam QR major, quàm RO. Pari modo oſtendam, IQ eſſe majorem, quàm QR, & ſic deinceps. Quoniam igitur continuando rationem LO ad LR ad primam LO ſemper accedunt partes OR, RQ, QI, &c. perpetuò creſcentes, patet veniri ad quantitatem quavis data majorem. Quod erat demonſtrandum.*

Lemma 2.

Fig. 18. utraque. *Si ratio quæcunque majoris inæqualitatis AB ad CB ſemper continuetur, ad quantitatem venietur quavis data minorem.*

a Per 9. l. 6. *Data ſit LO quantumvis parva. Fiat a ut BC ad* *d Per lem. 1.* *BA, ſic LO ad LR. Poterit d ratio LO ad LR toties continuari, ut aliquis terminus habeatur, pu-*

ta L I, major, quàm AB. Quoties verò continuata jam eſt ratio LO ad LR, per totidem terminos CB, EB, FB continuetur ratio AB ad CB, erit FB minor, quàm OL.

Nam ex conſt. patet IL, QL, RL, OL eſſe proportionales ipſis AB, CB, EB, FB. Igitur ex æquo, ut e IL ad OL, ſic AB ad FB; & permutando f ut IL ad AB, ſic OL ad FB. Sed IL eſt major, g quàm AB. Ergo etiam data OL eſt major, quàm FB. Quod erat demonſtrandum. e Per 22. l. 5. f Per 16. l. 5. g Per cõſt.

Problema.

Data ſit ratio minoris inæqualitatis AB ad BC. Oporteat hanc per infinitos terminos continuare, & omnium ſummam exhibere. Fig. 19.

Erigantur perpendiculares AL, BO æquales datis AB, BC, & per LO ducatur recta concurrens cũ ABC producta in Z. Dico 1. ſi ex C erigas perpendicularem CQ, erit CQ tertia proportionalis. QC transfer in CE, & ex E erige ER, erit hæc quarta. ER transfer in FF, & erige FS, erit hæc quinta; atque ita ratio AB ad BC, hoc eſt AL ad BO per terminos AL, BO, CQ, ER, FS, &c, ſive AB, BC, CE, EF, FI, &c. in infinitum continuabitur, quia quilibet terminus (ut FS) poterit auferri ex reſiduo FZ; cùm enim LA (hoc eſt AB) ſit minor, quàm AZ, etiam FS erit b minor, quàm FZ. b Patet ex cor. 1. p. 4. l. 6.

Dico 2. AZ eſt æqualis toti ſummæ infinitarum proportionalium.

1 Pars AZ eſt ad BZ, ut c AL ad BO; hoc eſt, ut AB ad BC. Igitur permutando o AB eſt ad AZ, ut BC ad BZ. Ergo AZ eſt ad BZ, d ut BZ ad CZ. Sed ut AZ eſt ad BZ, ſic LA eſt ad OB, & ut BZ ad CZ, ita OB ad QC. Ergo etiam LA eſt ad OB, ut OB ad QC. Eodem modo c Per idẽ coroll. o Per 16. l. 5. d Per cor. 2. p. 18. l. 5.

 oſten-

oſtendam O B eſſe ad QC, ut QC ad RE, & ſic deinceps in infinitum.

2 Pars. Tota ſumma infinitorum terminorum neque minor eſt quàm AZ, neque major. Ergo æqualis. Non eſt major, quia, cum jam oſtenderim ſupra, QC eſſe minorem quàm CZ, & RE quàm EZ, & SF quàm FZ, & ſic deinceps ſine termino, poterunt omnes termini QC, RE, SF, &c. ſine fine conſtitui juxta invicem in recta AZ ſic ut numquam punctum Z attingatur. Non erit etiam minor, quàm AZ, quia jam oſtendi ſupra AZ, BZ, CZ eſſe continuè proportionales, & eodem modo idem oſtenditur de reliquis EZ, FZ, &c. Cum igitur transferendo proportionales QC, ER, FS, &c. in CE, EF, FI, reſidua EZ, FZ, IZ, &c. ſemper ſint continuè proportionales, ut jam oſtendimus, venietur tandem e Per lem. 2. *ad reſiduum* e *dato minùs, ac proinde ſumma proportionalium ſuperabit quantitatem omnem, quæ minor ſit, quàm AZ, undè ipſa non poteſt eſſe minor, quàm AZ. Quoniam igitur nec major eſt, nec minor, quàm AZ, eidem æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.*

Theorema.

PRimorum terminorum differentia, primus terminus, & tota infinitarum proportionalium ſumma ſunt continuè proportionales.

Fig. 19. *In ſuperiori figura ducatur OX parallela ad AZ: Igitur LX erit differentia primi termini AL, ſeu AB, & ſecundi BO, ſeu BC. Quoniam XO eſt parallela ad AZ, erit LX ad XO, ut* f *LA ad AZ.* f Per cor. 1. p. 4. l. 6. *Sed XO eſt AB, & LA etiam eſt AB. Ergò LX differentia eſt ad AB primum terminum, ut AB primus terminus ad AZ totam ſummam. Quod erat demonſtrandum.*

Idem

Idem univerſaliter, & breviſſimè demonſtrabitur in omni genere quantitatis hunc in modum. Sint continuè proportionales quæcumque (etiam numeri) AZ, BZ, CZ, &c. quæ transferantur omnes in primam AZ. Erunt igitur AB, BC, CE, EF, &c. proportionalium differentiæ, quæ unà cum poſtrema quantitate IZ æquantur primæ AZ. Quia verò, ſi proportionales in infinitum continuentur, poſtrema quantitas per lem. 2. evaneſcit, patet infinitarum proportionalium differentias æquari primæ AZ. Deinde, quia eſt AZ ad BZ, ut BZ, ad CZ, & ſic deinceps, erit dividendo AB ad BZ, ut BC ad CZ. & p convertendo ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, ita BC ſecunda differentia ad BZ quantitatem ſecundam, & ſic deinceps. Ergo ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, q ita omnes differentiæ (hoc eſt, ut jam oſtendi, prima quantitas AZ) ad omnes quantitates hoc eſt ad totam ſummam infinitarum quantitatum. Quod erat demonſtrandum. Fig. 20.

p Per cor. 1. p. 18. l. 5.

q Per 12 l. 5.

PROPOSITIO XII.

DAtis tribus rectis (AB, BC, AF) quartam proportionalem invenire. Fig. 21.

Diſponantur datæ rectæ, ut figura monſtrat, & duc rectam BF, cui parallela fiat CZ infinita. Ipſi CZ occurrat AF producta in L.

Dico AB eſt ad BC, ut AF ad FL, ut patet ex p. 2. hujus. Ergo FL eſt quarta proportionalis quæſita.

Scholium.

Pulchrè Bettinus *noſter in ſuo Ærario Mathematicæ Philoſophiæ, ex 35. l. 3. & 14. hujus, quæ ab hac non dependet, datis tribus quartam, & datis duabus tertiam proportionalem exhibet hunc in modum.*

Fig. 22. *Si tres dentur rectæ, ſecunda* CB, *& tertia* BD *ponantur in directum, quas prima* B*A tangat in*

a Per 5. l. 4. B *ſub quovis angulo. Per puncta* C, *A*, D *deſcribe* a *circulum, cui* *A*B *prima occurrat in* Z. B Z *eſt quarta proportionalis.*

b Per 35. l. 3. *Cùm enim rectangula* *A*B Z, CB D b *æqualia ſint, erit* *A*B *ad* BC, *ut* B D *ad* B Z *per* 14. *hujus, quæ ab hac, ut dixi, non dependet.*

Fig. 23. *Si dentur duæ rectæ* *A*B, BC, *ſecundæ* BC *apponatur in directum* B D *æqualis* BC. *Dein ipſam* C B *in* B *tangat prima* *A*B *ſub quovis angulo. Tum reliqua ut ſuprà. Erit* B Z *tertia proportionalis quæſita.*

Demonſtratio ſimilis eſt, cùm enim rectangula *A*B Z, C.B D *ſint æqualia, erit* *A*B *ad* BC, *ut* B D (*hoc eſt ut* BC) *ad* B Z.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 24. *Datis duabus rectis* (*A*C, C B) *mediam proportionalem invenire.*

Tota compoſita A B biſecetur in O, & centro O deſcribatur circulus per A, & B. Ex C erige perpendicularem CF occurrentem peripheriæ in F.

Dico AC eſt ad CF, ut CF ad CB.

a Per 31. l. 3. Ducantur enim AF, BF; triangulum *a* AFB rectan-

rectangulum eſt, & à recto angulo ducta eſt perpendicularis F C in baſim. Ergo A C eſt ad C F, ut *b* C F ad C B. *b Per cor. 1.p.8.l.6.*

Corollarium.

HInc patet, ſi ex quovis peripheriæ puncto (F) ducta ſit ad diametrum perpendicularis (F C), eam eſſe mediam proportionalem inter diametri ſegmenta (A C, C B.)

Scholium.

HIc locus omninò exigit, ut de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis etiam breviter dicamus aliquid in hujus problematis ſolutionem. Platonis hortatu omnes Græciæ Geometræ ſummo ſtudio incubuerunt. Ab Eutocio in comment. in Archim. varii recenſentur ſubtiliſſimi modi, Platonis, Architæ Tarentini, Menechmi, Eratbosthenis, Philonis, Byſantii, Heronis, Apollonii Pergei, Nicomedis, Dioclis, Spori, Pappi, quibus alios deinde addiderunt Vernerus, P. Gregorius à S. Vincentio, Renatus Carteſius. Ex omnibus viſum eſt tres adferre reliquis faciliores.

Modus Platonis.

*OPorteat inter datas A*B, B*C duas medias invenire.* *Fig. 25.*

*Ponantur A*B, B*C ad rectum angulum, & producantur infinitè verſus X, & Z. Accipiantur deinde duæ normæ (ita Claudius Richardus noſter; Plato enim unica norma utitur, ſed* a *cujus lateri DE inſerta ſit regula mobilis per D E) & unius normæ angulus D applicetur rectæ B X, ea lege, ut & latus unum tranſeat per A, & ad punctum E, in quo latus alterum ſecabit rectam B Z applicata norma ſecunda tranſeat per C. Dico B D, B E duas eſſe* *a Vide Fig. 26.*

me-

medias inter datas AB, BC, hoc eſt, ut AB eſt ad BD, ſic eſſe BD ad BE, & BE ad BC.

Demonſtratio patet ex coroll. 1. p. 8. l. 6. Nam ADE rectangulum triangulum eſt, & ab angulo recto in baſim perpendicularis cadit DB. Ergo per dictum coroll. ut AB ad BD, ſic BD ab BE. Et ob eandem cauſam ut BD, ad BE, ſic BE ad BC. Inter datas igitur AB, BC repertæ ſunt duæ mediæ BD, BE. Quod erat faciendum. Hic modus inter omnes intellectu facillimus eſt.

Modus Philonis Byſantii.

Fig. 27. *DUæ datæ AB, BC jungantur ad rectum angulum; tum perficiatur rectangulum ABCD; & producantur DA, DC infinitè, ducanturque diametri BD, AC ſe ſecantes in E. Centro E per B ducatur circulus, qui, quòd angulus ABC rectus ſit, tranſibit* b *per A, & C. Tum regula ſic applicetur ad punctum B, ut interceptæ BG, OF ſint æquales. dico AF, GC eſſe duas medias inter datas AB, BC; hoc eſt ut AB, BC; hoc eſt ut AB eſt ad AF, ſic AF eſſe ad GC, & GC ad CB.*

b Patet ex 31. l. 3.

Demonſtr. Quia GB, OF c *æquantur, etiam OG, BF æquales erunt. Ergo æqualia ſunt rectangula OGB, BFO, hoc eſt rectangula* d *DGC, DFA. Ergo eſt ut GD ad DF,* e *ſic reciprocè AF ad GC. Sed GD, eſt ad DF,* f *ut BA ad AF. Ergo ut BA eſt ad AF, ſic AF eſt ad GC. Rurſùm quia jam oſtendi AF eſſe ad GC, ut BA eſt ad AF, eſt verò BA ad AF, ut GD ad DF, hoc eſt ut GC ad CB; erit quoque AF ad GC, ut GC eſt ad CB. Omnes igitur quatuor BA, AF, GC, CB ſunt continuè proportionales, ac proinde inter datas AB, BC inventæ ſunt duæ mediæ. Quod erat faciendum.*

c Per cõſtr.

d Per cor. 1. p. 36. l. 3.

e Per 14. quę ab hac non pẽdet.

f Per cor. 1. p. 4. l. 6.

Hi

Hi duo modi quamvis ſint ingenioſi, & faciles, tamen, quia habita normæ, & regulæ applicatio, non niſi tentando fit, Geometrici non ſunt.

Modus Carteſii.

PAretur inſtrumentum hujuſmodi. Duæ regulæ aperiri poſſint, & claudi circa Y. His inſertæ ſint plures normæ inter ſe connexæ in B,C,D,E,F,G *ea lege, ut dum regulæ Y X, Y Z aperiuntur, norma* BC *impellat normam C D in regula Y Z, & norma C D impellat normam D E in regula Y X, & D E impellat E F, & E F impellat F G, & ſic deinceps. Dum verò regulæ Y X, & Y Z clauduntur, omnia puncta* B,C,D,E,F,G *incidant in unum, idemque punctum A. Hoc inſtrumento inter duas datas non ſolùm duæ, ſed etiam quatuor, & ſex, imò quotvis mediæ reperientur. Quod neque per ſectiones conicas, neque per modos ullos ab auctoribus ſuprà dictis inventos obtineri poteſt.* Fig. 28.

Pro duabus mediis opus eſt normis tribus, pro mediis 4 normis 5, & ſic deinceps.

Minor datarum transferatur in regulam Y X, & ſit Y B*; major in regulam alteram Y Z, & ſit Y E. Applicetur norma prima ad punctum* B, *ibidemque firmetur, & aperiantur regulæ, donec normæ tertiæ latus tranſeat per E. Dico Y C, Y D eſſe duas medias inter datas Y B, Y E; hoc eſt Y B eſſe ad Y C, ut Y C eſt ad Y D, & Y D ad Y E.*

Demonſtratio manifeſta eſt ex coroll. 2. p. 8. lib. 6. Nam ex natura inſtrumenti in trigono Y C D angulus ad C rectus eſt, ab eoque cadit C D perpendicularis in baſim Y D. Ergo per dictum coroll. ut Y B *eſt ad Y C, ſic Y C eſt ad Y D. Rurſùm, quia in trigono Y D E angulus*

ad D rectus eſt, ab eoque cadit perpendicularis D C in baſim Y E, erit ut Y C ad Y D, ſic YD ad Y E. Sunt igitur Y B, Y C, Y D, Y E quatuor continuè proportionales. Inter datas igitur Y B, Y E inventæ ſunt duæ mediæ Y C, Y D. Quod erat faciendum.

Si inter datas YB, YG petantur 4 mediæ, aperi regulas donec normæ quintæ latus F G tranſcat per G. Erunt YC, YD, YE, YF quatuor mediæ inter YB, YG. Demonſtratio patet ex eod. coroll.

Hic modus quamvis organum ſit Platonico illo operoſius, planè eximius eſt, tùm quia nihil perficit tentando, tùm quia ad 4, & 6. imò quotcunque medias ſe extendit.

Per duas medias perficitur problema Deliacum, cubi nimirum duplicatio, & corpora quæcunque o *vide ſchol. poſt. 18. l. 12.* *in data proportione* o *augentur, vel minuuntur, quemadmodum idipſum in figuris planis efficitur* p *vide cor. 3. p. 20. l. 6.* p *per unam mediam. Hanc viam primus aperuit Hippocrates, quam ut ſingularem, & unicam omnis Geometrarum poſteritas amplexa eſt.*

PROPOSITIO XIV.

Fig. 29. 30. *Parallelogramma æqualia (X, Z), quæ unum angulum (C) uni (O) habent æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc eſt AC eſt ad CB, ut F O ad OL.)*

Et, ſi latera ſic habent reciproca, parallelogramma ſunt æqualia.

1 Pars. IL, & S B productæ concurrant in Q. Parallelogrammum X eſt ad parall. R, ut A C a ad CB. *a Per 1. l. 6.*

CB; & Z eſt ad *b* R, ut FO ad OL. Sed quia per hyp. *b Per eand.*
X, & Z æqualia ſunt, X eſt *c* ad R, ut Z ad R. *c Per 7. l. 5.*
Ergo etiam AC eſt ad CB, *o* ut FO ad OL. *o Per 11. l. 5*
Quod erat demonſtrandum. *d Per 1. l. 6.*

Demonſt. 2. pars. Ut AC ad CB, ſic *d* X eſt ad R, & ut FO ad OL, ſic *e* Z ad R. Sed jam per hyp. AC eſt ad CB, ut FO ad OL. Ergo X eſt ad R *o* ut Z eſt ad R. Ergo X, Z æqualia *q* ſunt. *e Per ean.* *o Per 11. l. 5.* *q Per 9. l. 5.*

PROPOSITIO XV.

Æqualia triangula (ACL, FCB), quæ unum angulum (C) uni (O) æqualem habent, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca, hoc eſt AC eſt ad CB, ut FO ad OL.) *Fig. 31. 32.*

Et ſi latera ſic habent reciproca, triangula ſunt æqualia.

Ducatur recta FB; reliqua demonſtratio eadem quæ præcedentis.

Corollarium.

Tam parallelogramma, quàm triangula, quæ reciprocant baſes, & altitudines, ſunt æqualia. Et è converſo.

Patet ex duabus præcedentibus.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor rectæ (AB, FI, IL, BC) fuerint proportionales (hoc eſt ſi AB ſit ad FI, ut IL ad BC.) Rectangulum (X) ſub extremis (AB, BC) æquale *Fig. 33*

eſt

eſt rectangulo (Z) ſub mediis F I, I L.

Et ſi rectang. ſub extremis æquatur rectangulo ſub mediis, erunt illæ quatuor rectæ proportionales.

1 Pars. In rectangulis X, & Z circa rectos angulos, ac proinde æquales B, I per hyp. eſt A B ad F I, ut reciprocè I L ad C B. Ergo *a* X, & Z æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

a Per 14. *l.* 6.

2 Pars. Quoniam X, & Z jam ponuntur æqualia. Ergo *b* circa æquales angulos B, & I eſt A B ad F I, ut reciprocè I L ad B C. Quod erat demonſtrandum.

b Per eãd.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 34.

SI tres rectæ (AB, F L, BC) fuerint proportionales, rectangulum ſub extremis (AB, BC) æquale erit quadrato mediæ (F L.)

Et ſi rectangulum ſub extremis æquatur quadrato mediæ, erunt tres illæ rectæ proportionales.

1 Pars. Mediæ F L accipiatur par O. Quoniam igitur per hyp. A B eſt ad F L, ut F L ad B C, eſtque O par F L. Erit quoque A B, ad F L, ut O ad B C. Ergo *o* rectang. ſub extremis A B, B C æquatur rectangulo ſub mediis F L, & O, hoc eſt quadrato F L.

o Per præc.

2 Pars. Demonſtratur ſimiliter ex ſecunda parte præcedentis FC.

Corollarium.

Fig. 24.

EX hac, & ex 13. patet, ſi in circulo ſit F C perpendicularis diametro, rectangulum A C B æquale eſſe quadrato.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

S*uper data recta (RS) dato polygono (BQ) ſimile, ſimiliterque poſitum deſcribere.* Fig. 35.

Polygonum datum BQ reſolve in triangula. Super data recta RS fac *a* angulos R, O æquales angulis B, A. Coibunt latera in X. Super XS fac angulos V, I æquales angulis T, C. Coibunt latera in Z. Dico factum. *a* Per 23. *l.* 1.

Nam quia anguli R, O æquantur angulis B, A, etiam E, k *b* æquales erunt: & quia etiam *c* V æquatur T, totus EV toti kT æqualis erit. Similiter, quia *d* ſinguli O, I æquantur ſingulis A, & C, toti OI, AC æquales erunt. Et quia *e* V, & I æquantur T, & C, etiam Z, & Q æquales *f* ſunt. Polygona igitur RZ, BQ ſibi mutuò æquiangula ſunt. Reliquum eſt, ut oſtendatur etiam latera eſſe proportionalia. RS eſt ad BF, *g* ut SX ad FL; & rursùm SX eſt ad FL, *h* ut SZ ad FQ. Ergo ex æquo *i* RS eſt ad SZ, ut BF ad FQ. &c. *b* Per cor. 9. *p.* 32. *l.* 1. *c* Per cōſtr. *d* Per cōſtr. *e* Per cōſtr. *f* Per cor. 9. *p.* 32. *l.* 1. *g* Per 4. *l.* 6. *h* Per eād. *i* Per 22. *l.* 5.

PROPOSITIO XIX.

T*riangulorum (X, Z) ſimilium proportio eſt duplicata proportionis laterum (AC, FI) æqualibus angulis ſubtenſorum.* Fig. 36. 37.

Hoc eſt; ſi *a* fiat, ut AC ad FI, ſic FI ad tertiam AQ, triang. X eſt ad triang. Z, ut AC prima ad tertiam proportionalem AQ. Vide defin. 10. 5. *a* Per 11. *l.* 6.

Quoniam triangula X, Z ſunt ſimilia, erit BA

b Per 4. l. 6. LI, *b* ut AC ad IF. Sed per conſtr. ut AC ad IF, *c Per 11. l. 5.* ſic IF ad AQ. Ergo etiam BA eſt ad LI, *c* ut IF ad AQ. Ergo in triangulis QBA, & Z latera circa angulos A, I, qui per defin. triangulorum ſimilium æquales exiſtunt, ſunt reciproca. Æquantur igitur *d* QBA, & Z. *d Per 15. l. 6.* Atqui triangulum X ad QBA eſt, ut *e* baſis AC ad baſim AQ. *e Per 1. l. 6.* Ergo etiam X eſt ad Z, ut AC ad AQ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO. XX.

Fig. 38. **S***Imilia polygona (ABCDE, FGHIK) dividuntur (1) in ſimilia triangula (P, S, & Q, T, & R, V) numero æqualia: (2) & totis proportionalia; (3) & polygonorum proportio duplicata eſt proportionis laterum (AB, FG) inter æquales angulos (B, G, & BAE, GFK) exiſtentium.*

a Per def. 1. l. 6. 1 Pars. Quoniam polygona ſunt ſimilia, erunt *a* ſibi mutuò æquiangula, eruntque bini binis æquales anguli BAE, GFK, & B, G, & BCD, GHI, & CDE, HIk, & Ek. Quia igitur AB eſt ad BC, *b Per eand.* *b* ut FG ad GH, angulique B, & G æquales ſunt, *c Per 6. l. 6.* ſimilia *c* ſunt triangula P, S. Similiter demonſtrabitur, ſimilia eſſe R, & V. Deinde quia toti BCD GHI, & ablati BCA, CHF æquales ſunt, etiam *d Per cor. 9. p. 32. l. 1.* reliqui ACD, FHI æquales erunt. Eodem modo oſtendam æquari ADC, FIH. Ergo *d* tertius CAD *e Per 4. l. 6.* tertio HFI æqualis eſt. Quare *e* etiam Q, & T triangula ſimilia ſunt. Liquet ergo 1. Pars.

Pars 2. Quoniam ſimilia ſunt P. & S, ratio P, ad *f Per præc.* S duplicata eſt *f* rationis CA ad HF. Sed ob eandem *g Per 34. l. 5.* cauſam etiam ratio Q ad T duplicata eſt rationis CA ad HF. Ergo P eſt ad S, ut *g* Q ad T.

Eo-

Eodem modo oſtendam ut Q eſt ad T, ita R eſſe ad V. Ergo ut *i* unum antecedens P eſt ad unum conſequens S, ita omnia antecedentia P, Q, R ſimul ſumpta, ad omnia conſequentia S, T, V ſimul ſumpta hoc eſt polygonum ad polygonum. Quod erat demonſtrandum. *i Per 12. l. 5.*

3 Pars. Ratio P ad S eſt *k* duplicata rationis AB ad FG. Sed ratio polygoni ad polygonum eſt eadem cum ratione P ad S, ut jam oſtendi. Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum eſt duplicata rationis AB ad FG. Quod erat tertium. *k Per præc.*

Corollaria.

1 OMnes figuræ ordinatę, ſeu regulares, ut æquilatera triangula, quadrata, pentagona, &c. ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum. Omnes enim ordinatæ ſunt ſimiles inter ſe, ut patet ex defin. 1. 6.

2 Si figurarum quarumvis ſimilium latera AB, FG inter ęquales angulos poſita ſint nota, etiam proportio figurarum innoteſcet. Sit ex gr. AB 2. ped. & FG 6 pedum, fiat ut 2 ad 6, ita 6 ad alium numerum nempe 18. Figura minor eſt ad majorem, ut 2 ad 18, ſeu ut 1 ad 9. Invenitur autem tertius proportionalis numerus, ſi ſecundus datorum multiplicetur per ſeipſum, & productus per primum dividatur. *Fig. 38.*

3 Ex eadem propoſitione elicitur methodus præclara, figuram quamvis rectilineam augendi, vel minuendi in ratione data; ut ſi velim pentagoni, cujus latus eſt AB, aliud facere quintuplum: inter terminos rationis datæ AB, BC inveni *m* mediam proportionalem BX: ſuper hac conſtrue *n* pentagonum ſimile dato. Hoc erit quintuplum dati. *Fig. 39.* *m Per 13. l. 6.* *n Per 18 l. 6*

Nam per 20 pentagonum AB eſt ad ſibi ſimile BX, ut AB prima ad BC tertiam.

Porrò, cùm etiam circulorum proportio ſit duplicata proportionis diametrorum (ut oſtendetur p. 2. l. 12.), hæc praxis ad circulos quoque pertinebit.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 40. *Figuræ (A, B) quæ eidem (C) ſimiles ſunt, etiam ſibi mutuò ſimiles ſunt.*

Patet ex defin. 1. lib. 6. ex axiom. 2. lib. 1. & propoſit. 11. lib. 5.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40. & 41. *Si quatuor, aut plures rectæ (FI, LQ; & OR, SV) proportionales fuerint, figuræ ſimiles, ſimiliterque ab iis deſcriptæ (A, B, & E, K) proportionales erunt:*

Et è converſo.

Demonſtratio primæ partis patet ex 34. 5. Quoniam enim a rationes A ad B, & E ad K ſunt duplicatæ rationum FI ad LQ, & OR ad SV ex hyp. æqualium, etiam ipſæ æquales erunt.

a Per 19. & 20. l. 6.

Pars 2. patet ex 35. lib. 5.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

Æquiangula parallelogramma (X, Z) inter ſe rationem habent compoſitam ex rationibus laterum (AC ad CB, & LC ad CF.) Fig. 42.

Hoc eſt, ſi fiat CB ad O, ut LC ad CF, X eſt ad Z, ut AC ad O. Vide quæ demonſtravimus l. 5. parte 3. num. 13.

Concurrant IL, SB in Q. Parallelogrammum X eſt *b* ad parallelogrammum R, ut AC ad CB; & R eſt ad Z, *c* ut LC ad CF (hoc eſt, ut CB ad O.) Ergo *d* ex æquo X eſt ad Z, ut AC ad O. Quod erat demonſtrandum. *b Per 1. l. 6.* *c Per eam* *d Per 22. l. 5.*

Corollaria.

Hinc, & ex 34. lib. 1. patet primò, Triangula, quæ unum angulum ad C æqualem habent, rationem habere compoſitam ex rationibus rectarum AC ad CB, & LC ad CF æqualem angulum continentium. Fig. 42.

Patet 2. rectangula, ac proinde, & parallelogramma quæcunque rationem inter ſe habere compoſitam ex rationibus baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem. Neque aliter de triangulis ratiocinaberis.

Patet 3. Quo modo triangulorum, ac parallelogrammorum proportio exhiberi poſſit. Sunto parallelogramma X, & Z, & eorum baſes AC, CB, altitudines CL, CF, fiat *e* ut CL altitudo ad altitudinem CF, ita baſium altera CB ad O. Parallelogrammum X eſt ad parallelogram. Z, ut AC eſt ad O. Fig. 42. *e per 12. l. 6.*

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 43. *IN omni parallelogrammo (SF), quæ circa (AB) diametrum ſunt parallelogramma (CL, OI) & toti, & inter ſe ſimilia ſunt.*

Per 27. 1. æquales ſunt anguli C, S, & L, F. Per eandem E eſt par I, hoc eſt per eandem ipſi A; B verò & toti SF, & parti CL communis eſt. Igitur totum SF, & pars CL æquiangula ſunt. Reliquum eſt, ut etiam latera æqualibus angulis oppoſita habeant proportionalia.

Quoniam in triangulis BCE, BSA, eſt CE parallela ad SA, erit *c* BC ad CE, ut BS ad SA; & CE eſt ad EB, ut *e* SA ad AB. Quia verò in triangulis quoque ELB, AFB, EL eſt parallela ad AF, erit EB ad EL, ut *i* AB ad AF. Ergo ex æquo *f* CE eſt ad EL, ut SA ad AF. Igitur *l* CL, & totum SF ſimilia ſunt. Eodem modo oſtendam OI eſſe ſimile toti SF. Ergo *n* CL, & OI ſunt etiam ſimilia inter ſe. Quæ erant domonſtranda.

c Per cor. 1. p 4. l. 6. *e* Per idem cor. *i* Per idem cor. *f* Per 22. l. 5. *l* Per def. 1. l. 6. *n* Per 21. l. 6.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 46. *POlygonum datum (A) in aliud dato (B) ſimile tranſmutare.*

Sive polygonum conſtituere æquale dato A, & ſimile alteri dato B.

Super CF latere polygoni B, cui ſimile petitur, fac rectangulum Q *a* æquale B. Deinde ſuper FS fac *b* rectangulum R æquale A. Manifeſtum eſt CF, & FI eſſe in directum. Inter

a Per 45. l. 1. *b* Per ean.

CF

CF, FI inveni *c* mediam proportionalem F L. Super hac fac *d* polygonum ſimile dato B, erit hoc etiam æquale dato A.

c Per 13. l.6.
d Per 18. l. 1.

Nam cum per conſtr. ſint tres proportionales CF, FL, FI polygonum B eſt ad ſimile ſibi polygonum ſuper F L factum, *e* ut CF ad F I; hoc eſt *i* ut Q ad R. Igitur permutando ut polygonum B eſt ad Q, ita polygonum ſuper F L eſt ad R. Sed per conſtr. polygonum B æquatur Q. Ergo etiam polygonum ſuper F L ſimile ipſi B æquatur R, hoc eſt per conſtruct. dato A. Factum eſt igitur, quod petebatur.

e Per 20. l. 6. & defi. 10. l. 5.
i Per 6. l. 6.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 44.

Parallelogramma ſimilia (B D, F N) habentia angulum communem (A) circa eandem diametrum exiſtunt.

Duc rectas AE, CE, ſi negas AEC eſſe diametrum communem parallelogrammorum BD, & FN, ipſius BD diameter eſto recta alia AGC ſecans FE in G, & duc parallelam GH, Parallelogramma igitur FH, BD exiſtent circa communem diametrum AGC, ac proinde *a* erunt ſimilia. Ergo ut BA ad AD, *b* ſic FA ad AH. Sed etiam ut BA ad AD, ſic FA ad AN, cùm BD, FN ſimilia ſint per hyp. Ergo FA eſt ad AH, ut FA ad AN. Quod eſt abſurdum.

a Per 24.6
b Per def. 1. l. 6.

PROPOSITIO 27. 28. 29

Tyronibus faceſſunt negotium, & nullius ferè ſunt uſus.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 45. *Datam rectam (AB) ita ſecare, ut tota (AB) ſit ad unum ſegmentum (AC), ſicut idem ſegmentum eſt ad reliquum (CB)*

Hoc eſt (ut loquuntur Geometræ) lineam extrema, ac media ratione ſecare.

Per 11. 2. ita ſeca AB in C, ut rectangulum ſub AB, CB ſit æquale quadrato AC. Dico factum.

Erit enim per 17. ut AB ad AC, ſic AC ad CB.

Hujus ſectionis vis admirabilis eſt in corporum regularium inſcriptione, & comparatione.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 47. *Si à lateribus trianguli rectanguli (ACB) figuræ ſimiles quæcunque deſcribantur, erit ea, quæ opponitur recto angulo, duabus ſimul reliquis (L, R) æqualis.*

a Per cor. 2. p. 8. l. 6.
b Per 20. l. 6. & Per def. 10. l. 5.
c Per cor. 2. p. 8. l. 6.

Propoſitio igitur 47. lib. 1. hìc redditur univerſalis.

Ab angulo recto C demittatur perpendicularis CO. Quoniam AB, BC, BO ſunt *a* tres proportionales, erit F ad ſibi ſimilem R, *b* ut AB prima ad BO tertiam. Rursùm, quoniam *c* BA, AC,

AC, AO ſunt proportionales, erit F ad ſibi ſimilem L, ut *d* B A prima ad A O tertiam. Quia igitur eſt F ad R, ut A B ad BO, & F ad L, ut AB ad A O, erit quoque F ad R, & L ſimul ſumptas, ut *e* AB ad BO, AO ſimul ſumptas. Sed AB duabus B O, A O æqualis eſt. Ergo etiam F duabus R, & L æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

d Per 20. l. 6. & def. 10. l. 5.

e Per 24. l. 5.

Corollarium.

EX hac propoſitione facilè dabitur quotcunque figuris ſimilibus rectilineis quibuſcunque una omnibus æqualis, & ſimilis, eadem prorsùs methodo, qua prop. 1. ſcholii poſt 47. l. 1. exhibetur datis quotlibet quadratis unum æquale. In demonſtratione tantùm pro 47. l. 1. citetur 31. l. 6.

PROPOSITIO XXXII.

VIx habet uſum, nec quidquam habet notabile.

PROPOSITIO XXXIII.

IN æqualibus circulis, vel eodem anguli ſive ad centra (ut ABC, FOD,) ſive ad peripheriam (ut ARC, FSD) eam inter ſe rationem habent, quam arcus (AKC, FGD,) quibus inſiſtunt. Idem intellige de ſectoribus. Fig. 48.

Quod attinet ad angulos centri, & ſectores, demonſtrabitur eodem prorsùs modo, quo prop. 1. hujus libri demonſtratum eſt, triangula æquè alta eſſe ut baſes. Tantùm ubi iſthìc citatur prop. 38. l. 1. hìc citetur 29. l. 3.

Quoniam verò ad peripheriam anguli R, & S dimidii *a* ſunt angulorum ad centrum C A B , F O D, quod de his oſtenſum eſt , liquebit etiam de illis .

a Per 20. l. 3.

Corollaria .

Fig. 49. 1 ANguluscentri (B A C) eſt ad quatuor rectos , ut arcus B C , cui inſiſtit , ad totam circumferentiam .

Nam ut BAC ad rectum B A F , ita per hanc 33 arcus B C ad quadrantem BF . Ergo angulus BAC eſt ad 4 rectos, ut arcus B C eſt ad 4 quadrantes , hoc eſt ad totam peripheriam.

2 Inæqualium circulorum arcus I L , BC, qui æquales ſubtendunt angulos ſive ad centra , ut IA L, & B A C, ſive ad peripheriam , ſunt ſimiles .

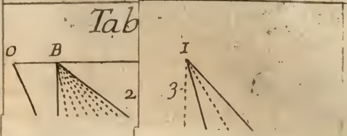
Nam arcus IL eſt ad ſuam peripheriam, *b* ut angulus I A L , hoc eſt, ut B A C ad 4 rectos , & arcus B C eſt ad ſuam peripheriam , *c* ut idem angulus B A C ad 4 rectos . Ergo IL eſt ad ſuam peripheriam, ut B C ad ſuam . Ergo *d* ſunt ſimiles arcus I L , & B C.

b Per cor. 1.
c Per idem cor.
d Per def. 4. l. 6.

3 Duæ ſemidiametri (A B , A C) à concentricis peripher is arcus auferunt ſimiles I L , B C. Patet ex coroll. 2.

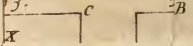
4 Segmenta (B k C, I O L,) quæ angulos capiunt ęquales (k O) ſimilia ſunt.

Nam per coroll. 2. arcus B C , I L, ac proinde etiam arcus B k C , I O L ſimiles ſunt.

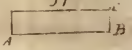

Tab
O
B
2
I
3

bula II. Lib

33.



34.



ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER UNDECIMUS,

Nobis Septimus.

SEx libris primis ſubjungit Euclides elementa numerorum tribus ſequentibus ſeptimo, octavo, & nono comprehenſa, quibus etiam decimum de quantitatibus incommenſurabilibus adjungit. Nos à planis immediatè tranſimus ad ſolida; de numeris ſeorſum tractaturi. Id, opinor, diſcentibus commodius erit, ſi elementa Geometriæ nulla alia tractatione interrupta ſimul omnia habeantur. Nihilominus cùm citabimus propoſitiones hujus, & ſequentis libri, eos non Septimum, & Octavum, ſed Undecimum, & Duodecimum appellabimus, ne, ſi ab ordine Euclideo ubique recepto diſcedamus, propoſitionum citatio implicatior reddatur.

Hic liber duas quodammodo partes complectitur. In prima jaciuntur fundamenta, quibus ſolidorum, hoc eſt, corporum doctrina univerſa nititur. Altera parallelepipedorum affectiones proponuntur.

DEFINITIONES.

1 SOlidum, ſive corpus eſt, quod longitudinem, latitudinem, & profunditatem habet.

2 Solidi

Fig.1.l.11. 2 Solidi extremum eſt ſuperficies..

Linea recta (A B) eſt ad planum (C C) recta, ſive perpendicularis, cùm ad rectas omnes lineas (C A) in plano (C C) ductas, à quibus illa tangitur, angulos rectos facit (B A C, B A C.

Fig. 2. 4 Planum ad planum rectum, ſive perpendicure eſt, cùm omnes rectæ lineæ (LQ,) quę communi planorum ſectioni (X R) perpendiculares ducuntur in planorum uno, rectæ ſunt alteri plano (A B C O.)

Fig. 3. 5 Si recta linea (O L) plano inſiſtat non ad rectos angulos, & à ſublimi ejus puncto (L) ad planum ducatur perpendiculalis L P, jungaturque P O, angulus L O P dicitur inclinatio lineæ O L ad planum.

Fig. 4. 6 Si planum (R E) plano (L Q) non inſiſtat perpendiculariter, alterius ad alterum inclinatio eſt acutus angulus (A B C,) qui continetur à rectis lineis (A B, & B C), quę in utroque plano ad communem ſectionem (O E) ducuntur perpendiculares.

7 Planum ad planum ſimiliter inclinatum dicitur, atque alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli ſunt æquales.

8 Parallela plana ſunt, quæ in omnem partem producta æqualibus ſemper intervallis diſtant.

9 Similes figuræ ſolidę rectilineę ſunt, quę ſimilibus planis continentur multitudine ęqualibus.

Fig. 5. 10 Angulus ſolidus rectilineus eſt, qui pluribus, quàm duobus planis angulis (B A C, C A O, O A B) non in eodem exiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis continetur.

11 Æquales ſolidi anguli ſunt, qui intrà invicem poſiti congruunt.

Quemadmodum angulus planus eſt inclinatio linearum,

rum , ita ſolidus angulus eſt inclinatio ſuperficierum . De utroque igitur eodem modo ratiocinandum erit. Conſule ſcholium poſt prop. 16. l. 3.

12 Prima eſt figura ſolida planis comprehenſa, quorum adverſa duo (OFE, ACB) ſunt parallela, æqualia, & ſimilia. *Fig. 6. 7. 8.*

13 Parallelepipedum eſt ſolidum ſex quadrilateris ex adverſo parallelis comprehenſum. *Fig. 8.*

14 Si ſex plana ex adverſo parallela ſint quadrata, ſolidum iis comprehenſum Cubus erit.

PROPOSITIO PRIMA.

R*Ectæ lineæ pars una (AC) nequit eſſe in ſubjecto plano (OE), altera (CB) extra planum.* *Fig. 9.*

Per ſe clarum eſt ex definitione plani, & lineæ rectæ, vide defin. 7. & 4. l. 1.

PROPOSITIO II.

O*Mne triangulum in uno eſt plano. Et duæ rectæ ſe mutuò ſecantes in eodem plano ſunt.* *Fig. 10.*

Prima pars per ſe clara eſt, cùm triangulum nihil ſit aliud, quàm plana ſuperficies tribus rectis comprehenſa. Ex quo etiam patet pars altera.

PROPOSITIO III.

S*I duo plana (AB, CD) ſe mutuò ſecant, (EF) communis eorum ſectio eſt recta linea.* *Fig. 11.*

Patet ex definitione plani. Licebit tamen ſic demonſtrare, ſi EF ſectio communis non eſt recta linea, ducatur in plano CD recta EOF, & in plano BA recta EQF. Duæ igitur rectæ EOF, EQF claudent ſpatium. Quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO IV.

Fig. 12. *SI recta (BA) duabus rectis (CAX, FAS) ſe mutuò ſecantibus perpendicularis exiſtat, etiam plano per ipſas ducto perpendicularis erit.*

Si negas, alia recta BQ plano rectarum AC, AF ſit perpendicularis. Junge AQ, & huic in plano FAC duc perpendicularem QO. Hęc producta neceſſariò ſecabit * aliquam rectarum CAX, FAS, vel utramque ubicumque tandem fuerit punctum Q. Secet ergo CAX in O, jungaturque BO. Quoniam ergo angulus BAO per hyp. rectus eſt.

erit quad. BO. Æ. *a* quad. BA, quad. AO.

ſed quia BQ ponitur recta plano FAC, ac proinde *b* rectum facit cum AQ angulum BQA, eſt

quad. BA. *c* Æ. quad. BQ, quad. AQ.

Et quia angulus AQO per conſtr. rectus eſt,

quad. AO Æ. * quad. OQ, quad. AQ

Ergo quad. BO. Æ. quad. BQ, quad. OQ, quad. AQ bis.

Ergo quad. BO majus eſt BQ, & OQ, ac proinde *d* angulus BQO rectus non eſt. Ergo

BQ

* Colligitur ex ſchol. poſt 31. l. 1.

a Per 47. l. 1.

b Per def. 3. l. 11.

c Per 47. l. 1.

* Per eād.

d Patet ex eadem.

BQ non eſt recta *e* plano CAF. Liquet ergo quæſitum. *e Patet ex def. 3. l. 11.*

Scholium.

Ex eo, quod ponebatur BQ eſſe recta plano FAC, directè eſt demonſtratum, BQ non eſſe rectam plano FAC; ac proinde ex eo, quòd negaretur aſſertio theorematis, eadem aſſertio directè probata eſt. Hæc demonſtratio quoad ſubſtantiam eſt Joannis Ciermans.

PROPOSITIO V.

Si tres rectę (BA, CA, FA) eidem rectæ (AR) ad idem punctum (A) ſint perpendiculares, tres illæ erunt in uno plano. *Fig. 13.*

Sit enim, ſi fieri poteſt, earum una BA in alio plano RO, quod ſecet LQ planum duarum reliquarum CA, FA recta AO. Quoniam RA per hyp. perpendiculariter inſiſtit duabus CA, FA, plano LQ recta *a* erit. Ergo cum AO rectum facit *b* angulum RAO. Sed etiam ex hyp. angulus RAB rectus eſt. Ergo anguli RAB, & RAO æquales ſunt. Quod eſt abſurdum. *a Per prec.* *b Per def. 3. l. 11.*

PROPOSITIO VI.

Lineæ rectę (AB, CD), quę eidem plano (EF) ſunt perpendiculares, inter ſe ſunt parallelæ. *Fig. 14.*

Poſtulari poterat ut per ſe notum; licebit tamen ſic demonſtrare.

Juncta BD, fac in plano FE lineam DG normalem

lem ad BD, & parem BA, junganturque DA, GA, GB. Rectæ BD, DG ęquantur *a* BD, BA; & anguli BDG, *b* DBA ſunt recti. Ergo AD, BG *c* ſunt ęquales. Igitur triangula ABG, GDA ſibi mutuò æquilatera ſunt, ac proinde anguli ABG, ADG æquales. Sed ABG *e* rectus eſt. Quare & ADG rectus. Sunt verò & BDG ex conſtr. & CDG ex definit. 3. recti. Ergo GD ad tres CD, AD, BD recta eſt. Ergo CD cum AC, BD eſt in uno *i* plano; ſed etiam AB cum AD, BD *o* in uno plano eſt. Ergo AB, CD ſunt in uno plano. Ergo cùm anguli ABD, CDB ſint *p* recti, erunt AB, CD *q* parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

a Per cõſtr. *b Per def. 3. l. 11.* *c Per 4. l. 1.* *e Per def. 3. l. 11.* *i Per præc.* *o Per 2. l. 11.* *p Per def. 3. l. 11.* *q Per 29. l. 1. & def. 36. l. 1.*

PROPOSITIO VII.

Fig. 15. R*Ecta (EF) ſecans rectas (AB, CD) poſitas in eodem plano in uno eſt cum ipſis plano.*

Poſtulari poterat. Qui volet ſic demonſtret. Planum rectarum AB, CD ſecet aliud planum per puncta E, F; ſi jam EF non eſt in plano AB, CD non erit EF communis ſectio. Sit ergo EGF. Ergo EGF *a* eſt linea recta. Duæ igitur rectæ EF, EGF concludunt ſpatium. Quod eſt abſurdum.

a Per 3. l. 11.

Corollarium.

HInc ſequitur, ſi EF ſecat parallelas AB, CD, in eodem eſſe cum ipſis plano; omnes enim parallelæ *b* ſunt in uno plano.

b Per def. 36. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

SI parallelarum (AB, CD) una (AB) plano (EF) ſit recta, etiam altera (CD) eidem plano erit recta. Fig. 14.

Poterat poſtulari. Si demonſtratio quæritur, ferè ſimilis ea eſt demonſtrationi propoſitionis 6.

PROPOSITIO IX.

REctę (AB, EF), quæ ſunt eidem rectę (CD) parallelæ, licet non in eodem cum illa plano, etiam ſunt inter ſe parallelæ. Fig. 16.

Quamvis poſtulari poſſet, licebit tamen ſic demonſtrare.

In plano parallelarum AB, CD duc Gk normalem ad CD. Item in plano parallelarum EF, CD duc Hk normalem ad CD. Ergo *a* Ck recta eſt plano GkH. Ergo cùm AG, EH ſint parallelæ ad Ck erunt AG, EH *b* rectæ plano GkH. Ergo AG, EH *c* ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum. *a Per 4. l. 11.* *b Per 8. l. 11.* *c Per 6. l. 11.*

PROPOSITIO X.

SI duæ rectæ (AC, BC) ſint parallelæ duabus rectis DF, EF, licet non ſint in eodem plano, æquales angulos (C, & F) comprehendunt. Fig. 17.

Fiant CA, CB æquales FD, FE, & ducantur DE, AB, DA, FC, EB. Cùm AC, FD ſint

a Per 33. l. 1. ſint parallelæ, & æquales, etiam A D, C F *a* parallelæ ſunt, & æquales. Similiter oſtendam B E, C F eſſe parallelas, & æquales. Ergo etiam A D,
b Per præc. B E ſunt *b* parallelæ, & *c* æquales: Æquantur
c Per ax. 1. *d* ergo A B, D E. Cùm igitur triangula B A C,
d Per 33, l. 1. E D F ſibi mutuò ſint æquilatera, anguli C, &
e Per 8. l. 1. F *e* æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XI.

Fig. 18. *AD planum datum (AB) à dato extra illud puncto (C) perpendicularem ducere.*

Conſtr. In plano A B duc quamvis D F, ad quam ex C perpendicularem deſcribe C E. Ad eandem per E in plano A B perpendicularem duc A E M. Tùm ad A M ex C perpendicularem demitte C G. Dico C G plano A B rectam eſſe.

Per G ponatur H G parallela ad D F.

a Per 4. l. 11. Per conſtr. D E recta eſt ad C E, & E M. Ergo D E recta *a* eſt plano C E M: adeòque & *b* H G.
b 8. l. 11. Ergo *c* C G recta eſt ad H G. Sed C G ex conſtr.
c Per def. 3. l. 11. recta eſt ad E M. Ergo C G *d* recta eſt plano A B.
d Per 4. l. 11. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XII.

Fig. 19. *EX dato plani (EF) puncto (A) rectam ad datum planum erigere.*

A quovis extra planum E F puncto D fac D B
a Per præc. ad planum *a* E F rectam, junctaque B A duc A C parallelam D B. Dico factum. Demonſtratio patet ex 8.

Scho-

Scholium.

Practicè per datum punctum perpendicularis ducitur dato plano, ſi norma O K N *ad datum punctum applicetur.*

PROPOSITIO XIII.

Lineæ ex eodem puncto ductæ (*DC, EC*) *nequeunt ambæ ad idem planum* (*A*B) *eſſe rectæ.* Fig. 20.

Aliàs enim per 6. forent parallelæ, quod fieri non poteſt.

PROPOSITIO XIV.

Si eadem recta (*AB*) *ad duo plana* (*F G, L Q*) *perpendicularis eſt, plana erunt parallela.* Fig. 21.

Sumatur in planorum alterutro F G quodvis punctum C, ex quo ducatur C E parallela ad AB occurrens plano L Q in E. Erit C E etiam *a* recta plano utrique F G, L Q. Quare ſi jungantur rectæ A G, B E, erunt anguli A, B *b* recti. Ergo A C, B E ſunt *c* parallelæ. Ergo A C E B parallelogrammum eſt, ac proinde C E, quam jam oſtendi utrique plano eſſe perpendicularem, æquatur *d* A B. Eodem modo oſtendam, omnes utrique plano perpendiculares eſſe æquales. Ergo plana *e* ſunt parallela. Quod erat demõſtrandum.

a Per 8. *l.* 11. *b* Per def. 3. *l.* 11. *c* Per 29. *l.* 1. *d* Per 34. *l.* 1. *e* Per def. 8. *l.* 11.

PROPOSITIO XV.

Si rectæ duæ ſe mutuo tangentes (*B A, C A*) *ad duas alias ſe mutuò tangentes* (*E D, F D*) *ſint parallelæ, etiam plana per ipſas ducta erunt parallela.* Fig. 22.

Ex A ducatur AG recta ad planum EF, ponanturque GH, GI parallelæ ad DE, DF, Erunt hæ *a* parallelæ etiam ad AB, AC. Cum igitur anguli IGA, HGA ſint *b* recti, erunt etiam *c* CAG, BAG recti. Ergo GA, quæ ad planum EF eſt recta, etiam recta *d* eſt plano BC. Ergo plana *e* BC, EF ſunt parallela. Quod erat demonſtrandum.

a Per 9. *l.* 11. *b* Per def. 3. *l.* 11. *c* Per 27. *l.* 1. *d* Per 4. *l.* 11. *e* Per præc.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 23.

P*Lanum (EHFG) ſecans parallela plana (AB, CD) in iis facit ſectiones (EH, GF) parallelas.*

Si non: cum ſint in eodem plano ſecante, convenient *o* alicubi in I. Quare cum totæ HEI, FGI ſint *a* in planis AB, CD productis etiam hæc convenient in I. Quod eſt abſurdum contra definitionem 8. hujus.

o Per ſchol. poſt 31. *l.* 1. *a* Per 1. *l.* 11.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 24.

P*Arallela plana rectas lineas (BD, & HG) proportionaliter ſecant.*

Ducantur in planis PQ, TV rectæ BH, DG, item BG occurrens plano RS in F, junganturque FC, FI. Planum trianguli BGD ſecans parallela plana facit ſectiones CF, DG *a* parallelas. Ergo eſt BC ad CD, ut *b* BF ad FG Rurſum triangulum BHG ſecans parallela plana facit ſectiones *c* BH, FI parallelas. Ergo eſt HI ad IG, ut *d* BF ad FG; hoc eſt (quod jam oſtendi) ut BC ad CD. Quod erat demonſtrandum.

a Per præc. *b* Per 2. *l.* 6. *c* Per præc. *d* Per 2. *l.* 6.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

SI recta linea (F E) ſit ad planum (AB) recta, omnia, quæ per ipſam ducuntur plana ſunt eidem plano (AB) recta. Fig. 25.

Ductum ſit per FE planum aliquod GC faciens cum AB ſectionem CD. In hoc ducantur Hk normales ad CD ſectionem communem. Cum igitur etiam *o* FE recta ſit ad CD, erunt kH *a* parallelæ ad FE. Sed FE ponitur recta plano AB. Ergo & Hk rectæ *b* ſunt plano AD. Ergo GC planum *c* plano AB rectum eſt.

o Per hyp. & defin. 3. l. 11.
a Per 29. l 1.
b Per 8. l. 11.
c Per def. 4. l. 11.

PROPOSITIO XIX.

SI duo plana (MF, GD) ſe ſecantia ſint ambo recta eidem plano (AB) erit etiam communis illorum ſectio (KL) recta plano (AB.) Fig. 26.

Quoniam planum MF ponitur rectum plano AB, ex def. 4. patet ex puncto L poſſe in plano MF duci rectam perpendicularem plano AB, eam nempè, quæ ex L eſſet in plano MF perpendicularis ad communem ſectionem EF. Similiter, quia planum GD ponitur perpendiculare ad AB, ex def. 4. patet in plano GD poſſe duci ex puncto L perpendicularem plano AB. Sed ex puncto L tantum *a* una poteſt duci perpendicularis plano AB. Ergo neceſſe eſt, ut recta, quæ ex L perpendicularis eſt plano AB, exiſtat in utroque plano MF, & GD ac proinde ſit ipſa planorum MF, & GD communis ſectio. Lk Quod erat demonſtrandum.

a Per 13. l 11.

PROPOSITIO XX.

Fig. 27. *SI angulus ſolidus (A) tribus planis angulis (BAC, CAD, DAB) continetur, horum duo quilibet reliquo ſunt majores.*

Si tres plani ſunt æquales, patet aſſertio, ſi inæquales, maximus eſto BAD. Hic nihilominus minor eſt duobus reliquis. Ex maximo enim BAD abſcinde BAE parem BAC, fiantque æquales AC, AE. Per E ducatur recta occurrens ipſis AB, AD in B, & D, junganturque BC, DC. Quoniam anguli *o* BAE, BAC æquales ſunt, & latera BA, AE æqualia lateribus BA, AC, etiam baſes BE, BC æquales *a* erunt. Quoniam verò BC. CD *b* majores ſunt, quàm BD, ablatis æqualibus BE, BC remanet CD major, quàm ED. Sed latera EA, AD æquantur lateribus *c* CA, AD. Ergo angulus *d* CAD major eſt, quàm EAD. Cum igitur BAC par ſit oſtenſus BAE, erunt duo ſimul BAC, CAD majores toto BAD. Quod erat demonſtrandum.

o Per cōſt. *a Per 4. l. 1.* *b Per 20. l. 1.* *c Per cōſt.* *d Per 25. l. 1.*

PROPOSITIO XXI.

Fig. 28. *PLani anguli ſolidum angulum quemcunque componentes quatuor rectis ſunt minores.*

Eſto ſolidus angulus A, planis angulis illum componentibus ſubtendantur rectæ BC, CD, DE, EF, FB in uno plano exiſtentes. Quo facto conſtituitur pyramis, cujus baſis eſt polygonum BCDEF, vertex A, totque cincta

triangu-

triangulis G, H, I, k, L, quot plani angul componunt ſolidum A. Jam verò quia duo anguli A B F, A B C *a* majores ſunt uno F B C, & duo A C B, A C D majores uno B C D, & ſic deinceps, erunt triangulorum G, H, I, k, L, circa baſim anguli ſimul ſumpti omnibus ſimul angulis baſeos B, C, D, E, F majores. Sed anguli baſeos una cum quatuor rectis faciunt bis tot rectos, *b* quot ſunt latera, ſive quot triangula. Ergo omnes triangulorum circa baſim anguli una cum quatuor rectis conficiunt ampliùs quàm bis tot rectos, quot ſunt triangula. Sed iidem anguli circa baſim una cum angulis, qui componunt ſolidum, componunt bis *c* tot rectos, quot ſunt triangula. Liquet ergo angulos ſolidum angulum A componentes quatuor rectis eſſe minores. Quod erat demonſtrandum.

a Per prę.

b Per theo. 2. ſchol. poſt. 32. l. 1.

c Patet ex 32. l. 1.

Corollarium.

EX hac, & præcedenti ſatis colligitur, ex tribus angulis planis rectis quatuor minoribus, quorum duo quilibet reliquo ſint majores, ſolidum angulum conſtitui poſſe.

Scholium.

E*X hac eadem propoſitione demonſtratur celebre theorema, tres tantùm figuræ planæ ordinatæ, & æquales corpus continere poſſunt, nimirum æquilatera triangula vel* 4, *vel* 8, *vel* 20. *Quadrata* 6. *Pentagona* 12. *Ac proinde quinque tantùm ſunt ordinata, ſeu regularia corpora. Pyramis, quæ* 4, *Tetraedrum, quod* 8, *Icoſaedrum, quod* 20 *æquilateris triangulis continetur, Cubus, qui* 6 *quadratis, Dodecaedrum, quod* 12 *æqualibus pentagonis ordinatis comprehenditur. Porrò corpus ordinatum dicetur, quod planis ordinatis, & æqualibus continetur.*

Demonſtr. Ex duobus æquilateris triangulis non poteſt conſtitui angulus ſolidus, ad hoc enim ſaltem requiruntur tres.

A tribus triangulis æquilateris in unum punctum coeuntibus poteſt conſtitui angulus ſolidus pyramidis; ex quatuor angulus ſolidus octaedri; ex quinque angulus ſolidus Icoſaedri, cum æquilateri trianguli anguli tum 3, tum 4, tum 5 ſint 4 rectis minores, ut colligitur ex corollario 12.p. 32.l. 1.

b Colligitur ex cor. p.11.l.4

Quoniam verò tres anguli pentagonici b *ſunt 4. rectis minores, poterunt tria pentagona in unum punctum coeuntia conſtituere ſolidum angulum, nempè Dodecaedri.*

A tribus quadratis in unum punctum coeuntibus effici ſolidum angulum cubi, per ſe patet. Atque ita quinque exſurgunt regularia corpora.

Præter hæc nulla eſſe alia ſic oſtenditur.

o Per cor. 12.p.32. l.1.

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4 rectos, unus enim facit duas o *tertias recti; ac proinde ſex tales efficient 12 tertias recti, hoc eſt rectos 4. Ergo à ſex æquilateris triangulis non poterit effici ſolidus angulus, multò minùs à pluribus.*

A quatuor quadratis non poſſe conſtitui ſolidum angulum, ac multò minùs à pluribus per ſe patet.

e Per cor. p.11.l.4.

Anguli pentagonici 4 ſunt 4 rectis majores, ſinguli enim efficiunt 6 quintas e *recti. Ergo à quatuor pentagonis nequit fieri angulus ſolidus, multò minùs à pluribus.*

f Per cor. 2.p.15.l. 4.

Nec ſanè ex aliis figuris quibuslibet ordinatis conſtitui poterit ſolidus angulus. Tres anguli hexagonici f *ſunt 4 rectis æquales, unus enim facit 4 tertias recti, ac proinde tres faciunt 12*

tertias

tertias recti hoc eſt 4 rectos. Ergo ex tribus hexagonis nequit conſtitui ſolidus angulus, multò minùs à pluribus.

Cum verò tres anguli hexagonici ſint 4 rectis æquales, tres anguli figurarum quarumlibet hexagono majorum, ut ſeptagoni, octagoni, &c. 4. rectis majores erunt. Quare manifeſtum eſt, reliquas figuras ordinatas omnes eſſe ineptas, ut ſolidum angulum conſtituant, adeoque præter jam dicta 5 nulla ordinata corpora dari poſſe.

PROPOSITIO XXII, XXIII.

ADmodum prolixæ ſunt, ac moleſtæ tyronibus; & ferè uſu non veniunt.

PROPOSITIO. XXIV.

PLana parallelepipedum continentia (1.) ſunt parallelogramma, (2) quæ ex adverſo, ſunt ſimilia, & (3) æqualia. Fig. 29.

1. Pars. Planum AF ſecans plana BD, FH ex defin. 13. parallela facit *a* ſectiones BA, FE parallelas. Rurſum planum AF ſecans plana AH, BG per defin. 13. parallela facit *b* ſectiones AE, BF parallelas. Ergo BFEA parallelogrammum eſt. Simili argumento reliqua parallelepipedi plana ſunt parallelogramma. *a* Per 16. *l.* 11. *b* Per ean.

2. Pars. Quoniam ex prima parte patet AB, BC parallelas eſſe EF, FG, erunt *c* anguli ABC, EFG pares. Quare, cum & latera alternis ſint paria, ſimilia ſunt parallelogramma adverſa BD, FH. Eodem modo probatur de cæteris oppoſitis. *c* Per 10. *l.* 11.

3. Pars patet ex prima parte, & 4. vel 8. 1.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 30. *SI parallelepipedum (GFDI,) aut quodvis priſma plano (NP) ſecetur adverſis planis parallelo, erit ut baſis (DCPO) ad baſim (OPFE) ita ſolidum (GP)ad ſolidum (NF.)*

Demonſtrabitur eodem modo, quo 1. 6.

Corollarium.

Priſma ſectum plano adverſis planis parallelo ſectionem habet ſimilem, & ęqualem planis adverſis.

PROPOSITIO 26. & 27.

NOn ſunt neceſſariæ.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig.29. *PLanum per adverſorum planorum diametros (AC, EG) tranſiens parallelepipedum ſecat in duo æqualia priſmata.*

a Per 24. l.11. b Per 9. l. 11. c Per 7. l. 11.

Quoniam *a* BG, BE ſunt parallelogramma, CG, AE æquidiſtant eidem BF. Ergo & *b* inter ſe ſunt parallelæ, ac proinde in uno ſunt plano. Ergo rectæ AC, EG *c* in uno ſunt plano. Jam verò planum per illas ductum ſecare parallelepipedum in duo priſmata æqualia, ſic oſtendo. Intelligatur priſma AEGCDH ſupra planum ſuum EACG ita conſtitui, ut anguli D, H vergant ad angulos B, F. Manifeſtum eſt tum adhuc fore inter parallela plana BADC, FEHG. Tum verò neceſſe eſt, ut D cadat in B, & H in

H in F. Cadat enim D extra B, ſi fieri poteſt, in N,
Angulus BAC æquatur *d* angulo DCA. Sed *d Per 27.*
DCA æquatur NAC (eſt enim unus, idemque *l.1.*
angulus). Ergo BAC, & NAC æquales ſunt,
quod eſt abſurdum. Ergo D incidit in B, & pari
de cauſa H in F. Ergo priſma AEGCDH *e Per ax.*
congruit priſmati ACGEFB, ac proinde *e* ęqualia *7.*
ſunt.

PROPOSITIO 29. & 30.

Fig. 31.

Parallelepipeda (FEAGKIMC, & FEBHLOMI,) quæ eandem habent baſim (EFIM), & altitudinem eandem, ac proinde exiſtunt inter parallela plana (EFIM, GAOL), æqualia ſunt.

Vel enim exiſtunt inter lateralia parallela plana EAOM, & FGLI, vel non. Eſto primum. Ex 24. hujus, & 8. l. 1. patet triangula AEB, CMO, item GFH, kIL ſibi mutuò æquilatera, & æquiangula eſſe. Quare, ut in præcedenti, oſtendam priſmata CMOLIk, BEAH FG ſibi mutuo impoſita congruere, ac proinde *a* æqualia eſſe. Quare addito communi ſolido *a Per ax. 7.* FEBHkCMI tota parallelepipeda FEAGkI MC, FEBHLOMI æqualia erunt. Quod erat dem.

Sit deinde parallelepipedum FXQEMIPR *Fig. 32.* non inter eadem lateralia plana parallela exiſtens cum parallelepipedo FEAGkCMI. Quoniam ex hypotheſi GK, AC, RP, QX ſunt in uno plano ad baſim EFIM parallelo, RP, QX ſecent Gk in L, & H; AC verò in O, & B, junganturque EB, MO, FH, IL, facile oſtenſu eſt, plana ſolidũ FEBHLOMI continentia parallelo-

lelogramma eſſe ex adverſo æquidiſtantia, adeò-
c Per def. 13. l. 11. que ſolidum illud *c* eſſe parallelepipedum. Sed huic per primã partem parallelepipeda FXQEMIPR, & FEAGKCMI ſunt æqualia. Ergo etiam ſunt æqualia inter ſe. Quod erat dem.

Scholium.

HÆc propoſitio ſimilis eſt propoſitioni 35. l. 1. affirmat enim de ſolidis, quod illa de planis. Quare ſimilis etiam erit reliquorum caſuum demonſtratio.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 33. *PArallelepipeda ſuper æqualibus baſibus (AO, & EG), & in eadem altitudine (S) ſunt æqualia.*

Habeant parallelepipeda primò latera ad baſes normalia. Ad latus FG productum fiat parallelogrammum GMkH æquale, ac ſimile parallelogrammo AO, perfectòque parallelogrammo GMPR, rectæ PM, RG occurrant ipſi kH in Q, & L. Jam verò intelligantur ſuper Gk, GQ, GP conſtitui parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta, altitudo autem omnium communis ſit S. Solidum EGS eſt ad ſolidum GPS,
b Per 25. l. 11. ut EG *b* ad GP; hoc eſt (quia EG, AO per hyp.
c Per 35. l. 1. æquantur) ut AO ad GP; hoc eſt per conſtr. ut Gk ad GP; hoc eſt ut *c* GQ ad GP; hoc eſt
d Per 25. l. 11. *d* ut ſolidum GQS eſt ad idem ſolidum GPS. Quoniam igitur ſolida EGS, & GQS eandem habẽt rationem ad ſolidum GPS, erit ſolidum
e Per 9. l. 5. EGS *e* æquale GQS; hoc eſt ſolido *f* GkS; hoc
f Per 29. l. 11. eſt (quia baſes Gk, AO ſunt *g* ęquales, & ſimiles)
g Per cõſt. ſolido

ſolido *i* AOS. Quod erat propoſitum. *Per totum diſcurſum ſolida accipiuntur recta.* *i Patet ex 29. l. 11. imò per ſe.*

Habeant deinde parallelepipeda data EGS AOS latera ad baſes EG, & AO obliqua. Fiant ſuper EG, AO parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta in altitudine S, hæc æqualia erunt obliquis per 29. aut 30. l. 11. Quare cum parallelepipeda recta per primam partem ſint paria inter ſe, erunt & obliqua æqualia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII.

P*Arallelepipeda quævis æquè alta ſunt inter ſe ut baſes.* *Fig. 34.*

Baſes ſint GO, & A; ſuper CO fac parallelogrammum OE par ipſi A.

Super BC, OE intelligantur erigi parallelepipeda in altitudine k: hæc igitur partes erunt unius parallelepipedi BEk. Ergo *a* parallelepipedum OEk eſt ad parallelepipedum BCk ut baſis OE ad baſim BC; hoc *b* eſt, ut baſis A ad baſim BC. Sed quia baſes OE, & A ſunt æquales, parallelepipeda OEk, & Ak *c* æqualia ſunt. Ergo etiam parallelepipedum Ak eſt ad parallelepipedum BCk, ut baſis A ad baſim BC. Quod erat demonſtrandum. *a Per 25. l. 11. b Per cōſt. c Per præc.*

Scholium.

Q*Uod hìc de parallelepipedis oſtenſum eſt, demonſtrabitur in l. 12. de pyramidibus prop. 6; de quibuslibet priſmatis in corollario 1. poſt p. 9; de conis, & cylindris prop. 11.*

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Fig.35. *Similia parallelepipeda (HA, & CM) ſunt in triplicata ratione laterum homologorum (AB, BC.)*

Sint parallelepipeda AH, CM ſimilia. Ergo omnia ipſorum plana ſimilia *a* ſunt; adeoque AB ad *b* eſt, ut EB ad BO; & ut FB ad BG, ſic EB ad BO. Inſuper & anguli *c* planorum æquales ſunt. Collocentur ſic igitur ſolida AH, CM, ut æquales anguli CBO, ABE ſint oppoſiti, & latera AB, CB in directum; tum verò etiam *d* EB, OB in directum erunt. Cogitentur jam ſuper planis BQ, & EC facta ſolida ſic, ut ſolida kB, HA ſint unum parallelepipedum, & kB, PO faciant unum ſimiliter parallelepipedum, & PO, CM unum quoque parallelepipedum conficiant. Solidum HA eſt ad ſolidum kB *e* ut AE ad BR, hoc eſt, ut *f* AB ad BC; hoc eſt (ut per hyp. oſtendi ſuprà) ut EB ad BO; hoc eſt, ut *g* EC ad BQ, hoc eſt, ut ſolidum *i* idem kB ad ſolidum PO. Continuant ergo eandem rationem tria ſolida HA, kBPO. Jam verò ſolidum kB eſt ad ſolidum PO, ut k baſis BR ad baſim BQ; hoc eſt, ut *l* EB ad BO; hoc eſt, ut *m* FB ad BG; hoc eſt, *n* ut planum FC ad planum BS; hoc eſt, ut idem *o* rurſus ſolidum PO ad CM ſolidum. Quatuor ergo ſolida HA, kB, PO, CM ſunt continuè proportionalia. Ergo ratio primi HA ad quartum CM eſt *p* triplicata rationis primi HA ad kB ſecundum; hoc eſt, rationis *q* AE ad BR; hoc eſt, *r* rationis homologorum laterum AB ad BC. Quod erat demonſtrandum.

a Per defin.9.l.11
b Per defin.1.l.6.
c Per eãd.
d Patet ex 15.lib.1.
e Per 25. l.11.
f Per 1.l.6
g Per eãd.
h Per 25. l.11.
i Per eãd.
l Per 1.l.6
m Oſtendi ſupra ex hyp.
n Per 1. l.6.
o Per 25. lib.11.
p Per defin.10.l.5
q Per 25. l.11.
r Per 1. l.6.

Scholium

Scholium.

QUod hìc de parallelepipedis oſtenſum eſt, in libro 12. demonſtrabitur de pyramidibus propoſ. 8; de quibuslibet priſmatibus coroll. 2. poſt p. 9; de conis, & cylindris p. 12; de ſphæris p. 18.

PROPOSITIO XXXIV.

SI parallelepipeda æqualia ſunt (BM, CK), reciprocant baſes, & altitudines (hoc eſt, baſis AM eſt ad baſim FK, ut reciprocè altitudo FC ad altitudinem AB.) Fig. 36.

Et ſi reciprocant baſes, & altitudines, æqualia ſunt.

1. Pars. Sint primò latera ad baſes recta. Si jam ſolidorum B M, C k altitudines ſint pares, res patet.

Si altitudines ſint inæquales, à majori FC abſcinde FE parem BA, & per E duc planum EL ad Fk parallelum. Baſis AM eſt ad baſim Fk, ut ſolidum *b* BM ad ſolidum Ek; hoc eſt (quod ex hyp. paria ſint ſolida BM, Ck) ut ſolidum Ck ad Ek ſolidum; hoc eſt, ut *c* CG ad EG; hoc eſt, ut *d* CF ad EF; hoc eſt ex conſtr. ut CF reciprocè ad BA. Quod erat demonſtrandum. *b Per 32. l. 11.* *c Per 25. l. 11.* *d Per 1. l. 6.*

Sint deinde latera ad baſes obliqua. Erigantur ſuper iiſdem baſibus in altitudine eadem parallepipeda recta. Erunt his obliqua *e* parallelepipeda æqualia. Quare cùm hæc per 1. partem reciprocent baſes, & altitudines, etiam illa reciprocabunt. Quod erat demonſtrandum. *e Per 29. & 30. l. 11.*

2. Pars. Sint altitudines inæquales, lateraque ad

baſes

ad baſes recta, & ex majori CF ipſi BA ſume
f Per 32. l. 11. parem EF. Solidum BM eſt ad ſolidum Ek, ut f
AM ad Fk; hoc eſt ex hyp. ut CF ad BA; hoc
g Per 1. l. 6. eſt ex conſtr. ut CF ad EF; hoc eſt, ut g CG ad
i Per 25. l. 11. EG; hoc eſt, ut ſolidum i Ck ad ſolidum idem
Ek. Ergo ſolida BM, & Ck eandem habent
rationem ad Ek. Ergo ſunt paria. Quod erat
demonſtrandum.

Corollaria.

QUæ de parallelepipedis demonſtrata ſunt Prop. 29. 30. 31. 32. 33. 34. etiam conveniunt priſmatis triangularibus, quæ ſunt dimidia parallelepipeda, ut patet ex p. 28. Igitur.

Fig. 37. 1. Priſmata triangularia æquè alta ſunt ut baſes A, B.

2. Si ſimilia fuerint, eorum proportio triplicata eſt proportionis laterum æqualibus angulis oppoſitorum.

4. Si æqualia ſunt, reciprocant baſes, & altitudines: & ſi reciprocant baſes, & altitudines, æqualia ſunt.

Scholium.

QUod hic propoſ. 34. oſtenſum eſt de parallelepipedis, demonſtrabitur in lib. 12. de pyramidibus p. 9; de priſmatis quibuſcunque coroll. 3. poſt p. 9; de conis, & cylindris p. 15.

PROPOSITIO XXXV.

V*Aldè prolixa, ſervit ſequenti, quam ſine illa demonſtrabimus.*

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

Parallelepipedum (DH) ex tribus rectis proportionalibus (A, B, C) factum æquatur parallelepipedo (IN) facto à media (B), & æquiangulo priori. Fig. 38.

Parallelepipedi DH baſis FD habeat latus EF æquale A, & latus alterum ED æquale C, latus verò EG baſi inſiſtens æquale mediæ B. Erit parallelepipedum DH factum ex tribus rectis A, B, C. Parallelepipedi deinde IN tria latera LX, IX, XM (ac proinde omnia reliqua) ſint æqualia mediæ B, & angulus ſolidus X ſit æqualis angulo ſolido E. Erit parallelepipedum IN factum ex media B, & priori æquiangulum. Dico etiam eſſe æquale.

Cum enim per hyp. & conſtr. ſit ut FE ad LX, ita reciprocè IX ad DE, Erunt *a* baſes DF, IL æquales. Jam quia anguli ſolidi ad E, & X ſunt æquales, ſi ponantur intra invicem, *b* congruent, & ob æqualitatem rectarum EG, XM puncta M, G coincident. Quare una erit utriuſque ſolidi altitudo, perpendicularis nempè à punctis M, G jam congruentibus in planum baſeos demiſſa. Solida *c* igitur DH, IN æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

a Per 14. l. 6.
b Per def. 11. l. 11.
c Per 31. l. 11.

Scholium.

Hic porrò obſervabimus, id quod magnum habet uſum, ex tribus lineis quomodocunque inter ſe ductis ejuſdem magnitudinis ſolidum gigni.

ABC.

A B C. C A B. B C A.
1 2 3

In ſcemate hic appoſito duæ primæ litteræ deſignant baſim, tertiæ altitudinem. Comparemus primum cum ſecundo.

Baſis A B *eſt ad baſim C A per* 2. 6. *ut* B *latus ad C latus; hoc eſt reciprocè ut* B *altitudo ad C altitudinem. Ergo per* 34.

A B C. *Æ.* C *A* B.

Eodem modo oſtendes primum tertio, & tertium ſecundo eſſe æqualia.

PROPOSITIO XXXVII.

PArallelepipeda ſimilia, ſimiliterque à lineis proportionalibus deſcripta etiam ipſa ſunt proportionalia; & converſò.

Patet ex 34. lib. 5. Rationes enim parallelepipedorum per 33 hujus erunt duplicatæ rationum ex hyp. æqualium, quas habent lineæ.

Converſa patet ex 35. lib. 5.

Propoſitio vera eſt de quibuſcunque ſimilibus corporibus, quæ patebit lib. 12. duplicatam habere laterum rationem.

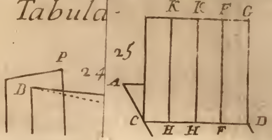
PROPOSITIO 38. & 39

NIhil continent memorabile, & vix ullius ſunt uſus.

PRO-


Ta
4.
R
A
F
C

Tabula



PROPOSITIO XL.

SI fuerit duo priſmata triangularia æqualis altitudinis (ABFGOC, & IKLPXQ), quorum unum baſim habeat parallelogrammam (OB) duplam baſeos alterius (IKL), quæ triangula ſit, priſmata erunt æqualia. *Fig. 39. & 40.*

Nam ſi perficiantur parallelepipeda kR, & CH, erunt hæc æqualia *a* ob baſium CA, Mk, & altitudinum æqualitatem. Ergo etiam priſmata ipſorum *b* dimidia æqualia erunt. Quod erat demonſtrandum. *a Per 31. l.11.* *b Per 28. l.11.*

Scholium.

EX hactenùs demonſtratis habetur dimenſio priſmatum triangularium, & quadrangularium, ſeu parallelepipedorum, ſi nimirùm altitudo ducatur in baſim, ut ſi altitudo ſit 10 *pedum, baſis verò pedum quadratorum* 100, *(menſurabitur autem baſis per ſchol. p. 36. vel* 41. *l.* 1.*) multiplica* 10 *per* 100, *proveniunt* 1000 *pedes cubici pro ſoliditate priſmatis dati.*

Demonſtratio facilis eſt. Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ducta in baſim. Ergo etiam quodvis parallelepipedum producitur ex altitudine in baſim ducta, cùm per 31 *æquale ſit parallelepipedo recto ſuper eadem baſi ad eandem altitudinem conſtituto.*

Deinde, cùm totum parallelepipedum producatur ex altitudine in totam baſim, ſemiſſis parallelepipedi (hoc eſt priſma triangulare per 28.*) producetur ex altitudine ducta in dimidiam baſim, triangulum nempe* ILK.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER DUODECIMUS,

Nobis Octavus.

Quod in libris præcedentibus hactenùs præſtare conati ſumus, ut Mathematum elementa ad faciliorem, ac breviorem methodum revocaremus, id inprimis præſtandum erit in hoc libro duodecimo, cujus doctrina cùm maximè ſit neceſſaria, demonſtrationes adeò ſunt prolixæ, ut tyrones in deſperationem plerumque conjiciant. Huic incommodo ita mederi propoſitum nobis eſt, ut tamen à rigore Geometricæ demonſtrationis non recedamus. Quod utrum ſimus aſſecuti, lector intelliget, ſi hæc noſtra cum Euclidea prolixitate contulerit.

DEFINITIONES.

Fig. 1. *l.* 12.

1 Pyramis eſt ſolidum (Z L) triangulis (A L C, C L F, F L B, B L A) comprehenſum ab uno plano (Z) ad unum punctum (L) conſtitutis.

Planum Z baſis dicitur, & eſſe poteſt vel triangulum, vel quadrangulum, vel quævis alia figura, ex cujus lateribus ſingulis triangula ſurgunt in unum punctum L, quod vertex dicitur, coeuntibus.

Ut triangulum inter rectilineas figuras planas, ita pyramis inter ſolidas prima, & ſimplicisſima eſt.

2 Si extra planum alicujus circuli (CL) acceptum fuerit punctum (A), ab eoque ducatur recta infinita (AF) tangens circulum in C, quæ puncto (A) manente fixo circa peripheriam circuli convertatur, donec in eum locum (ACF) redeat, unde moveri cœperat, ſuperficies à recta linea (ACF) deſcripta dicitur conica ſuperficies; corpus verò, quod hac ſuperficie, & circulo (CL) continetur, conus vocatur. *Fig. 2. 3.*

Vertex coni eſt A.

Baſis coni eſt circulus CL.

Axis coni eſt recta (AB) ex vertice ad baſeos centrum ducta.

Latus coni eſt recta (AC) à vertice ad baſeos circumferentiam ducta, quam eſſe totam in coni ſuperficie, ex ejus geneſi eſt manifeſtum.

Conus rectus eſt, cùm axis (AB) eſt baſi rectus. *Fig. 2.*

Conus ſcalenus, ſeu obliquus eſt, cùm axis (AB) non eſt ad baſim rectus. *Fig. 3.*

Fit etiam conus rectus à triangulo rectangulo (CBA) circa unum latus perpendiculare (AB) in orbem ducto. *Fig. 2.*

3 Si circa duos circulos æquales, & parallelos (CL, OQ) recta linea infinita (COF) convertatur, donec in locum redeat, unde moveri cœpit, ſic ut mota ſibi ipſi ſemper parallela maneat, ſuperficies à recta (COF) deſcripta dicitur cylindrica ſuperficies; corpus verò, quod hac ſuperficie, & binis circulis continetur, cylindrus vocatur. *Fig. 4. 5.*

Baſes cylindri ſint circuli (CL, OQ).

Axis cylindri eſt recta (AB) baſium centra connectens.

Fig. 4. Latus cylindri eſt recta (OC) in cylindri ſuperficie utramque baſim tangens.

Fig. 5. Rectus cylindrus eſt, cùm axis ad baſes rectus eſt.

Fig. 4. Scalenus cylindrus dicitur, cùm axis ad baſes non eſt rectus.

Fit etiam cylindrus rectus à rectangulo (OC BA) circa unum latus (BA) in orbem ducto.

Fig. 20. & 21. 4 Similes coni, & cylindri ſunt, quorum axes (Ak, ZO), & baſium diametri (BF, QR) ſunt proportionales.

5 Sphæra eſt ſolidum comprehenſum una ſuperficie, ad quam omnes rectæ lineæ à quodam puncto intra ipſam poſito ductæ ſunt equales.

Punctum illud centrum dicitur.

Sphæræ diameter eſt recta per centrum ducta ad ſuperficiem utrimque pertingens.

Fig. 6. Generatur ſphæra ſi ſemicirculus circa diametrum (AF) immotam convertatur.

6 Magnitudines figuræ alicui inſcriptæ, aut circumſcriptæ, ſive figura minores, vel majores in figuram deſinere dicuntur, cùm ab ea tandem differre poſſunt quantitate minori quacunque data, ſeu quantumvis parva.

Itaque ſi ea, quæ figuræ alicui inſcribuntur, ab ea tandem deficiant defectu minori quocunque dato, inſcripta dicentur in figuram deſinere. Et ſi ea, quæ alicui figuræ circumſcribuntur, excedant eam tandem exceſſu minori quocunque dato, dicentur rursùm circumſcripta deſinere in figuram.

PRO-

PROPOSITIO I.

Polygonorum ſimilium circulo inſcriptorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum (AF, IC.) *Fig. 6. & 7.*

Ducantur AO, BF, IR, LC. Quia polygona ponuntur ſimilia, *a* æquales erunt anguli OBA, RLI, & latera OB, BA proportionalia lateribus RL, LI. Ergo in triangulis OAB, RIL *b* anguli O, & R æquantur. Ergo etiam BFA, & LCI, qui iiſdem arcubus BA, LI inſiſtunt, ſunt *c* æquales. Anguli verò FBA, CLI in ſemicirculis ſunt *d* recti, ac proinde æquales. Ergo reliqui BAF, LIC *e* æquantur. Quoniam igitur triangula FAB, CIL ſibi mutuò æquiangula ſunt, erunt *f* ſimilia, eritque BA ad LI, ut AF ad IC. Jam, quia per hyp. polygona ſunt ſimilia, erit proportio eorum duplicata *i* proportionis laterum BA, LI; hoc eſt, ut jam oſtendi, duplicata proportionis diametrorum AF, IC. Quod erat demonſtrandum.

a Per defin. 1. l.6. *b Per 6. l.6.* *c Per 21. l.3.* *d Per 31. l.3.* *e Per coroll. 9. p. 32. l.1.* *f Per 4. l.6.* *i Per 20. l.6.*

Corollarium.

Polygonorum ſimilium circulo inſcriptorum ambitus ſunt inter ſe ut diametri.

Cùm oſtenſum jam ſit BA eſſe ad LI, ut AF ad IC, etiam OB erit ad RL, ut AF ad IC, & ſic de cæteris lateribus. Ergo per 12. 5. omnia ſimul latera ad ſimul omnia, hoc eſt ambitus ad ambitum ſunt, ut AF ad IC. *Fig. 6. & 7.*

Lemma.

Fig. 8. POlygona circulo inſcripta in circulũ deſinunt. Inſcribe quadratum A C B D. Cùm hoc
a Per ſch. poſt 6 & 7. l. 4. dimidium ſit quadrati *a* circulo conſcripti, erit majus dimidio circuli. Quare ſi hoc auferatur è circulo, auferetur plus quàm dimidium. Deinde ſingulis arcubus biſectis in E, k, H, I, inſcribe octogonum, & in E tangat F G, cui B C, D A occurrant in G, & F, erit C F parallelogrammum, cujus cùm dimidium ſit triangu-
b Per 41. l. 1. lum *b* C E A, erit hoc plus quàm dimidium ſegmenti C E A. Eodem modo ſingula triangula A k D, D I B, &c. ſingulorum ſegmentorum plus ſunt quàm dimidia. Ergò omnia triangula omnium ſegmentorum plus quàm dimidia ſunt. Hæc ergo ſi ex illis, hoc eſt ex reſiduo circuli auferas, plus quàm dimidium auferetur. Pari argumento ſi inſcribantur circulo polygona duplo ſemper plurium laterum, oſtendam è reſiduo circuli ſemper auferri plus quâm dimidium.
c Patet ex lem. 2. Schol. poſt. 11. l. 6. Ergo reſiduum erit tandem *c* minus quocunque dato, ac proinde polygona inſcripta tandem à circulo deficient quantitate minori data quacun-
o Per ăef. 6. l. 12. que, hoc eſt in circulum *o* deſinent. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Fig. 6. & 7. *CIrculorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum*.

Polygonorum ſimilium circulo ſine fine inſcri-
a Per 1. l. 12. ptorum proportio ſemper duplicata *a* eſt proportionis diametrorum. Atqui polygona circulo in
b Per lem. 0. infinitum inſcripta in circulum *b* deſinunt. Er-

go per

go per poriſma univerſale ſequens etiam circulorum proportio duplicata eſt proportionis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

Poriſma univerſale.

Si ea, quæ duabus figuris (A, B) inſcribuntur, in ipſas deſinant, quam proportionem inter ſe ſemper habent inſcripta, eandem habent & figuræ.

R
A B X Z
C F

Sit ratio X ad Z ea, quam inſcripta ſemper habent inter ſe. Si ergo negas rationem figurarum A, B eandem eſſe cum ratione X ad Z, quam ſemper habent ea, quæ figuris inſcribuntur, ſit ratio A ad B primò major ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R minor quàm figura A, erit ad figuram B, ut X ad Z. Quoniam inſcripta per hyp. deſinunt in figuras A, & B, erunt aliqua figuris A, & B inſcripta, quæ ab ipſis deficient *a* minori quantitate, quàm R deficiat à figura B. Sint ea C, & F. Ergo C erit majus, quàm R. Ergo C eſt ad B in *b* majori, quàm R ad B; hoc eſt (ut ponebatur) quàm X ad Z; hoc eſt per hyp. quàm idem C ad F. Quoniam igitur C eſt ad B in majori proportione, quàm ad F, erit B figura minor *c* ſibi inſcripto F, totum ſua parte. Eodem modo oſtendetur, rationem B ad A non poſſe eſſe majorem ratione Z ad X. Ergo ratio A ad B æqualis eſt rationi X ad Z. Quod erat demonſtrandum.

a Per def. 6. l. 12.

b Por 8. l. 5.

c Per 10. l. 5.

PROPOSITIO III, IV.

SUnt prolixæ, & difficiles tyronibus, nec alium habent uſum, quàm ut per eas demonſtretur quinta, quam nos ſine illis multò faciliùs demonſtrabimus.

Lemmata ad P. V.

I.

Fig. 9. *SI duæ pyramides triangulares ſecentur planis (OSE, RXZ) ad baſes (ABC, IVQ) parallelis, quæ dividant latera (CF, QL) proportionaliter (in E, & Z,) erunt (OSE, RXZ) inter ſe ut baſes (ABC, IVQ.)*

Quoniam parallela plana OSE, ABC ſecantur à planis BFC, AFB, AFC erunt ſectiones communes SE, BC, & OS, AB, & OE, AC *a* parallelæ. Ergo anguli OSE, ABC, & SOE, BAC, & OES, ACB bini, & bini æquales *b* ſunt. Quare ſectiones OSE, ABC *c* ſunt ſimiles. Eodem modo ſimiles eſſe oſtendam ſectiones RXZ, IVQ. Ergo ratio ſectionis ABC ad OSE eſt duplicata *d* rationis laterum BC ad SE, & ratio ſectionis IVQ ad RXZ duplicata eſt rationis VQ ad XZ. Atqui rationes BC ad SE, & VQ ad XZ ſunt eædem (eſt enim BC ad SE, ut *e* CF ad EF; hoc eſt per hyp. ut QL ad ZL; hoc *f* eſt, ut VQ ad XZ.) Ergo ratio ABC, ad OSE eadem eſt *i* cum ratione IVQ ad RXZ. Quod erat propoſitum.

a Per 16. lib. 11.
b Per 10. l. 11.
c Per 4. l. 6
d Per 19. l. 6.
e Per corol. 1. p. 4. l. 6.
f Per idem coroll.
i Per 35. l. 5.

Pyra-

I I.

P*Yramidi* (*Z C A F*) *triangulam habenti baſim* Fig. 10.
priſmata in infinitum inſcripta deſinunt in ipſam pyramidem.

Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes A B, B G, G F, & per B G factis ſectionibus G D N, & B E P baſi Z A C parallelis inſcripta intelligantur pyramidi priſmata triangularia B E P M A O, & G D N k B Q. His deinde extra pyramidem continuatis intelligantur pyramidi eſſe circumſcripta priſmata C I B A, P X G B, N H F G. Exceſſus circumſcriptorum ſupra inſcripta ſunt ſolida I M, X k, H G, quæ ſimul ſumpta æquantur priſmati C I B A; nam H G eſt *o* æquale D B, ac proinde H G cum X k æquatur P X G B; hoc eſt *p* M E B A. Ergo tria H G, X k, I M æquantur toti C I B A. Atqui ſi A F in plures ſine fine partes æquales dividatur, ac proinde priſmatum numerus in infinitum multiplicetur, A B fiet *a* quavis data minor. Ergo etiam *b* priſma C I B A fiet quovis dato minus. Ergo priſmatum circumſcriptorum (multoque magis pyramidis Z C A F, quæ pars eſt priſmatum ſibi circumſcriptorum) exceſſus ſupra inſcripta priſmata fiet quovis dato minor. Ergo inſcripta priſmata in pyramidem *c* tandem deſinunt. Quod erat demonſtrandum.

o Per 25. lib. 11.
p Per eăd.
a Collig. ex lem. 2. ſchol. poſt. 11. lib. 6.
b Patet ex 25. l. 11.
c Per defin. 6. l. 12.

PROPOSITIO V.

Fig. 11.

P*Yramides triangulares æquè altæ eam inter ſe proportionem habent, quam baſes* (*A Q R, E S X.*)

Pyramidũ altitudines ęquales referãt latera A P

E Z

EZ, quibus in quot placuerit æquales partes, ſed æquè multas utrimque diviſis, factiſque per diviſionum puncta ſectionibus ad baſes parallelis, intelligantur utrique pyramidi inſcripta eſſe priſmata trigona æquè multa, & æquè alta. Jam verò, quia priſmata LA, IE ſunt æquè alta, erit priſma LA ad priſma IE, ut *a* baſis LOB ad baſim INk; hoc eſt, *b* ut baſis QRA ad baſim SXE. Eodem modo oſtendam, ſingula priſmata pyramidi QPAR inſcripta eſſe ad ſingula inſcripta pyramidi SZEX, ut baſis QAR ad baſim SEX. Ergo etiam *c* ſimul omnia ſunt ad omnia, ut baſis ad baſim. Quare cùm ea tandem deſinant *d* in ipſas pyramides, etiam ipſæ erunt *e* ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

a Per cor. 1. 34. l. 11.
b Per lem. 1.
c Per 12. l. 5.
d lem. 2.
e Per poriſ. univerſ. poſt. p. 2. l. 12.

PROPOSITIO VI.

Fig. 12. & 13.

Pyramides quæcunque æquè altæ eam inter ſe rationem habent, quam baſes (AB, CFO.)

Reſolvantur baſes in triangula A, B, C, F, O, pyramides verò totę in pyramides triangulares. Pyramis AX eſt ad pyramidem OZ, ut *a* A ad O; & pyramis *b* BX eſt ad pyramidem OZ, ut B ad O. Ergo pyramides ſimul AX, BX (hoc eſt tota ABX) ſunt ad pyramidem OZ, ut A, B *c* ſimul ad O. Eodem diſcurſu pyramis ABX eſt ad pyramidem FZ, ut *d* AB eſt ad F; & ABX eſt ad CZ, ut *e* AB eſt ad C. Ergo ABX *f* eſt ad tres ſimul OZ, FZ, CZ; hoc eſt ad totam pyramidem OFCZ, ut AB ad OFC. Quod erat demonſtrandum.

a Per præc.
b Per ean.
c Per 24. l. 5.
d Per præ.
e Per 24. l. 5.
f Per ean.

PRO-

PROPOSITIO VII.

OMnis pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis eandem baſim, & altitudinem.

Sit primò pyramis trigona BGAC in eadem baſi, & altitudine cum priſmate BACFEO, ducantur BF, AO, AF. Triangula BFC, BFO ſunt *a* paria. Ergo pyramis BFCA pyramidi BOFA *b* æqualis eſt. Ob eandem cauſam pyramis OEAF par eſt pyramidi OBAF; hoc eſt pyramidi BOFA, ſunt enim eædem pyramides. Igitur etiam BFCA, & OEAF æquales ſunt. Omnes igitur tres BFCA, OEAF, OBAF ſive BOFA ſunt pares. Ergo tres ſimul unius BFCA triplæ ſunt. Atqui tres illæ conſtituunt priſma BACFEO. Illud ergo pyramidis BFCA; hoc eſt *c* BGAC triplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 14. *a Per* 34. *l.* 1. *b Per* 5. *l.* 12. *c Per* 5. *l.* 12.

Sit deinde pyramis quævis eandem habens baſim, & altitudinem cum priſmate AEFH, ductis lineis BC, BO, BE, & NI, NG, NH reſolve priſma in triangularia priſmata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet demonſtratio ex prima parte. Nam ſingulæ partes priſmatis triplæ erunt ſingularum partium pyramidis. Ac proinde totum priſma totius pyramidis triplum eſt. Quod erat demonſtrandum. *Fig.* 15.

PROPOSITIO VIII.

SImilium pyramidum (OACB, KHIN) proportio eſt triplicata ejus, quam habent homologa latera (AB, HN.) *Fig.* 16.

Sint

Sint primò trigonæ, perfectis parallelogrammis AM, & HQ, ſuper his conſtitue parallelepipeda AG, HL in altitudine pyramidum, quæ cùm pyramides ſint ſimiles, etiam patet ſimilia

a defin. 9. l. 11. *a* eſſe. Ducantur jam EF, RP, & per EFCB, item per RPIN ſecabuntur *b* parallelepipeda in

b Per 28. l. 11. duo priſmata æqualia: ſingula horum *c* tripla

c Per præc. ſunt pyramidum OACB, & kHIN. Utraque ergo ſimul: hoc eſt tota parallepipeda AG, HL ſextupla ſunt pyramidum. Pyramides ergo parallelepipedis proportionales ſunt. Sed horum

d Per 33. l. 11. ratio *d* triplicata eſt rationis laterum AB, HN. Ergo & illarum. Quod erat demonſtr.

Fig. 17. Quòd ſi pyramides ſimiles fuerit polygonæ, reſolvantur in triangulares AR, BR, CR, & Ok,

Ex 20. & 5. l. 6. & ex defi. 9. l. 11. Ek, Fk. Facilè *e* oſtendes etiam AR ipſi OK, & BR ipſi Ek, & CR ipſi Fk eſſe ſimiles. Ergo per 1. partem ratio pyramidum AR, Ok eſt triplicata rationis IM ad PZ; & ratio pyramidum BR, & Ek triplicata eſt rationis MX ad ZS; hoc eſt denuò per hyp. rationis IM ad PZ; & ratio pyramidum CR, Fk eſt triplicata rationis XQ ad ST; hoc eſt rurſùm IM ad PZ. Cùm ergo ratio ſingularum ad ſingulas ſit triplicata rationis

e Per 12. l. 5. IM ad PZ, etiam ratio *c* omnium ad omnes (hoc eſt ratio totius pyramidis ABCR ad totam OEFk) triplicata erit rationis IM ad PZ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO. IX.

Fig. 18. & 19. Æ*Quales pyramides reciprocant baſes, & altitudines; & quæ reciprocant, ſunt æquales.*

1 Pars. Sint primò pyramides trigonæ BACO, HkNL:

HkNL: perfectis parallelogrammis BE, HR, ſuper his ſint parallelepipeda BF, HP. Erunt hæc (ut oſtendimus in 8) pyramidum ex hyp. æqualium ſextupla, ac proinde æqualia inter ſe. Sunt verò horum parallelepipedorum altitudines Hk, BA eædem, quæ pyramidum, baſes verò BE, HR duplæ *o* ſunt baſium pyramidalium BCO, HNL, ac proinde iis proportionales. Cùm igitur ob parallelepipedorum æqualitatem ſit ut BE ad HR, ita *a* reciprocè Hk ad BA, etiam erit ut baſis BCO ad baſim HNI, ita reciprocè altitudo Hk ad altitudinem BA. Quod erat demonſtrandum.

o Per 34. l. 1.

a Per 34. l. 11.

Quòd ſi pyramides habeant baſes polygonas, retentis iiſdem altitudinibus reducantur ad trigonas, eruntque hæ illis æquales per 6. Sed pyramides ſic reductæ per jam demonſtrata reciprocant baſes, & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ reciprocant baſes, & altitudines. Quod erat demonſtr.

2. Pars. Quoniam jam ponitur eſſe BCO ad HNL, ut Hk ad BA, erit quoque BE ad HR, ut Hk ad BA. Ergo parallelepipeda BF, HP *b* ſunt æqualia, ergo & ſextæ eorum partes, nempè pyramides BACO, HkNL. Quod erat demonſtr.

b Per 34. l. 11.

Corollaria.

QUæ de pyramidibus demonſtrata ſunt per 6. 8. 9. etiam conveniunt quibuſcunque priſmatis, cùm hæc tripla *c* ſint pyramidum eandem baſim, & altitudinem habentium. Igitur.

c Per 7. l. 12.

1 Priſmatum æquè altorum eadem eſt proportio, quæ baſium. Id enim oſtenſum eſt de pyramidibus Prop. 6.

2 Similium priſmatum proportio eſt triplicata pro-

proportionis homologorum laterum. Id enim oſtenſum eſt de pyram. p. 8.

3 Æqualia priſmata reciprocant baſes, & altitudines, & quæ reciprocant ſunt æqualia. Id enim de pyramidibus oſtenditur p. 9.

Mirum eſt hæc ab Euclide prætermiſſa, cùm præcipua ſint, quæ de ſolidis rectilineis tradi poſſunt.

Scholium.

Ex hactenùs demonſtratis elicietur dimenſio quorumcunque priſmatum, ac pyramidum.

Priſmatis ſoliditas producitur ex altitudine in baſim ducta, pyramidis verò ex tertia altitudinis parte ducta in baſim.

Ut ſi priſmatis altitudo ſit 5 pedum, baſis verò 25 pedum quadratorum, multiplica 25 per 5, proveniunt 125 pedes cubici pro ſoliditate priſmatis.

Fig. 15. & 14. *Eſto enim priſma polygonum AH. Ejus baſi AE intelligatur æquale eſſe triangulum BAC, ſuperque eo priſma BE æquè altum, ac AH. Erunt* c *BE, AH æqualia priſmata. Sed BE priſma* d *producitur ex altitudine ſua in baſim BAC, hoc eſt* e *AE. Ergo etiam priſma AH fit altitudine ſua, quæ altitudini priſmatis BE æqualis ponitur, in baſim AE.*

c Per cor. 1. præc.
d Per ſchol. p. 40. l. 11.
e per conſt.

Hinc verò, & ex 7. patet demonſtratio partis ſecundæ.

Lemma ad Prop. X.

Pyramides, & priſmata, quæ conis, & cylindris in infinitum inſcribuntur, in conos, & ylindros deſinunt.

Demonſtratur ut lemma propoſitionis 2 adminiculo

culo propoſitionis 6. & corollarii 1. poſt p. 9; ſi ut iſtic plana circulo inſcripta, ita hìc pyramides, & priſmata, quæ ſuper planis illis tanquam baſibus conſiſtunt, à cono, & cylindro auferantur.

PROPOSITIO X.

Omnis conus tertia pars eſt cylindri eandem baſim, & altitudinem habentis. Fig. 20.

Baſi CL intelligatur inſcribi polygonum regulare quotcunque laterum, & ſuper illo tanquam baſi, cono quidem pyramis, cylindro autem priſma inſcribi. Erit pyramis *a* tertia pars priſmatis. Et ſi rursùm inſcribatur circulo polygonum laterum duplo plurium, ſuperque eo inſcribatur cono pyramis, & cylindro priſma, iterùm erit pyramis tertia pars priſmatis. Atque hoc ſemper eveniet. Quare cùm pyramides in conum, *b* priſmata in cylindrum deſinant, etiam *c* conus tertia pars cylindri erit. Quod erat dem.

a Per 7. l. 12.
b Per lem. præced.
c Per poriſ. univ. poſt. 2. l. 12.

PROPOSITIO XI.

Conorum æquè altorum (BAF, QXR) proportio eadem eſt, quæ baſium (CL, SE) Idem accidit cylindris æquè altis. Fig. 20 & 21.

Pyramides conis æquè altis inſcriptæ ſunt, *d* ut baſes. Atqui *e* pyramides tandem in conos deſinunt. Ergo etiam *f* coni ſunt, ut baſes. Cùm vero cylindri conorum eandem cum ipſis baſim, & altitudinem habentium ſint tripli, etiam ipſi erunt, ut baſes. Quod erat demonſtr.

d Per 6. l. 12.
e Per lem. ante 10. l. 12.
f Per poriſ. univ.

Corol-

Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur etiam priſmata, & cylindros æquè alta eſſe inter ſe vt baſes, imò quælibet corpora cylindriformia æquè alta; hoc eſt quæ producuntur ex quibuſcunque planis in eandem altitudinem ductis, eſſe inter ſe ut baſes. Eodem modo de pyramidibus, & cono æquè altis, & conicis quibuſcunque ratiocinare.

PROPOSITIO XII.

Fig. 20.*&* 21. *COnorum ſimilium* (*BAF*, *&* *QZR*) *proportio eſt triplicata proportionis diametrorum* (*BF*, *&* *QR*), *quæ ſunt in baſibus. Idem cylindris ſimilibus accidit.*

Similium conorum baſibus inſcribe polygona ordinata, quæ proinde ſimilia erunt. Pyramides ſuper his polygonis inſcriptæ conis etiam ſimiles ſunt quod facilè oſtenditur. Ergo earum proportio eſt triplicata *a* proportionis laterum BL, QE; hoc eſt *b* proportionis diametrorum BF, QR. Quare cùm pyramides *c* in conos deſinant, etiam conorum proportio *d* eſt triplicata proportionis diametrorum BF, QR. Quod erat demonſtrandum.

a Per 8. *l.* 12.
b Eſt demonſtr. in 1. *l.* 12.
c Per lem. ante 10. *l.* 12.
d Per poriſ. univ.

De cylindris patet theorema, cùm ſint tripli conorum.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

SI cylindrus (BI) ſecetur plano (RL) baſibus (BQ , CI) parallelo , erit pars (BL) ad partem (RI), ut axis ſegmentum (AO) ad ſegmentum axis (OF .) Fig.22.

Demonſtratur, ut prima ſexti.

Theorema eodem modo verum eſt de ſuperficie.

PROPOSITIO XIV.

CYlindri (AR, & CI) baſibus (MQ, GH) æqualibus ſunt inter ſe, ut altitudines LZ, SF.) Idem conis accidit. Fig.23.& 24.

Abſcinde ab altiori cylindro AR cylindrum AO altitudinis LE ejuſdem cum SF. Igitur cylindri AO, CI *a* æquales ſunt. Cùm igitur cylindrus AO ſit ad cylindrum AR, ut *b* LE ad LZ, etiam CI erit ad AR, ut LE ad LZ, hoc eſt (quia LE, & SF *c* æquantur) ut SF ad LZ. Quod erat demonſtrandum.

a Per 11. l.12.
b Per præced.
c Per conſtr.

Corollarium.

THeorema etiam verum eſt de priſmatis, itemque de pyramidibus, & demonſtratio planè ſimilis. Sed de priſmatis ex coroll. 1. prop. 9. lib. 12, & 25. lib. 11. ejuſque coroll. De pyramidibus ex hoc, & ex 7. l. 12.

PROPOSITIO XV.

Fig. 24. & 25. Æqualis cylindri (AR, FD) reciprocant baſes, & altitudines; & ſi reciprocant, æquales ſunt. Idem conis accidit.

Demonſtratur ut P 34. lib 11. ſed pro 32. & 25. iſthic citatis, hic adhibebitur prop. 11, & 15. l. 12.

Scholium.

CUm nihil attulerit Euclides de ratione compoſita in corporibus, eam breviter hoc loco demonſtrabimus.

1 Cylindrus ad cylindrum, & priſma ad priſma rationem habent compoſitam ex rationibus baſium, & altitudinum.

Fig. 25. & 24. Sunto cylindri FD, & AR. Ab altiori AR (nam in æquè altis res per ſe patet) abſcinde AO æquè altam, ac FD. Sit etiam ut baſis VT ad baſim MQ, ita FN ad X, & ut altitudo ND, ſeu BO ad altitudinem BR, ita X ad Z. Oportet igitur oſtendere, cylindrum FD eſſe ad cylindrum AR, ut FN eſt ad Z. Cylindrus FD eſt ad cylindrum AO, ut a baſis VT ad baſim MQ; hoc eſt, b ut FN ad X cylindrus autem AO eſt ad cylindrum AR, ut c BO ad BR; hoc eſt, ut d X ad Z. Igitur ex e æquo cylindrus FD eſt ad cylindrum AR, ut FN ad Z.

a Per 11. l. 12. b Per conſtr. c Per 13. l. 12. d Per conſtr. e Per 22. l. 5.

De priſmatis res eodem modo demonſtrabitur, ſed ex coroll. 1. p 9. & coroll. p 14.

2 Etiam conus ad conum, & pyramis ad pyramidem rationem habent compoſitam ex rationibus baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem.

Sunt

Sunt enim c *cylindrorum, ac priſmatum partes tertiæ.* c Per 10. ac 7. l. 12.

PROPOSITIO XVI. XVII.

HÆ *propoſitiones omnium prolixiſſimæ non alium uſum habent, quàm ut demonſtretur* P. 18. *quam nos alia faciliori via demonſtrabimus.*

Lemma ad P. 18.

C*Ylindri hemiſphærio inſcripti in hemiſphærium deſinunt.* Fig. 26.

Sit P Z Y maximus hemiſphærii ſemicirculus, ſitque radius A Z perpendicularis diametro P Y. Seca A Z in aliquot æquales partes A M, M N, N Z; ductiſque per diviſionum puncta M, N perpendicularibus, &c. Inſcribantur ſemicirculo rectangula O B R k, E D H S, quibus deinde extra circulum continuatis ſemicirculo circumſcripta intelligantur rectangula F T Y P, L V B O, Q X D E, eruntque omnia æquè alta; exceſſus autem circumſcriptorum ſupra inſcripta ſunt plana F k, L S, X E, V H, T R, quæ ſimul ſumpta conficiunt rectangulum F T Y P. Nam, quia X E æquatur D S, erunt L S, V H, X E ſimul æqualia rectangulo L B; hoc eſt O R. Quare ſi adjicias utrimque plana F k, T R, erunt ſimul omnia F k, L S, X E, V H, T R æqualia rectangulo F T Y P. Si jam intelligatur ſemicirculus cum rectangulis circa radium immotum A Z circumagi, inſcripta rectangula E H, O R producent cylindros hemiſphærio inſcriptos, & rectangula circumſcripta producent cylindros hemiſphærio circumſcriptos ſibi mutuò inſiſtentes; & ſicut rectangulorum circumſcripto-

rum exceſſus ſupra rectangula erat rectangulum F Y, ita etiam cylindrorum circumſcriptorum exceſſus ſupra inſcriptos erit cylindrus à rectangulo F Y genitus. Atqui hujus cylindri altitudo fiet quavis data minor, adeoque etiam ipſe quovis dato *b* evadet minor, ſi radio in plures ſine fine partes diviſo ractangulorum, indeque & cylindrorum numerus ſine fine multiplicetur. Ergo cylindrorum circumſcriptorum, multoque magis ipſius hemiſphærii, quod cylindrorum circumſcriptorum pars eſt, exceſſus ſupra inſcriptos cylindros fiet tandem quovis dato minor. Ergo cylindri hemiſphærio in infinitum inſcripti tandem deſinunt *c* in hemiſphærium. Quod erat demonſtrandum.

b Patet ex 13. *l.* 12.

c Per defin. 6 *l.* 12.

Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur, cylindros cono, conoidi, ſphæroidi, &c. inſcriptos in ipſa deſinere.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 27.

SPhærarum proportio eſt triplicata proportionis diametrorum (*B K, R Z.*)

Radiis A B, Y R in quot placuerit æquales partes, ſed æquè multas diviſis, ductisq; per diviſionum puncta perpendicuralibus &c. Intelligantur maximis ſphærarum ſemicirculis inſcripta eſſe rectangula æquè multa, quæ circa radios immotos A B, Y R circumacta inſcribant utrique hemiſphærio cylindros æquè multos ſibi invicem inſiſtentes. Quia k C *o* eſt ad C F, ut C F ad C B, erit ratio k C ad C B duplicata *a* rationis k C ad C F, hoc eſt rationis F C ad C B. Similiter

o Per coroll. p. 13. *l.* 6.

a Per defin. 10. *l.* 5.

liter erit ratio ZE ad ER duplicata rationis XE ad ER. Sed per conſtr. eſt kC ad CB, ut ZE ad ER. Ergo etiam *b* FC eſt ad CB, ut XE ad ER. Sed BC eſt ad CO per conſtr. ut RE ad ES. Igitur ex æquo *c* FC eſt ad CO, ut XE ad ES. Cylindri igitur *d* FL, XQ ſimiles ſunt, ac proinde eorum proportio eſt triplicata *e* proportionis diametrorum FI, XV, ſeu ſemidiametrorum FC, XE, quæ ſunt in baſibus. Sed proportio FC ad XE eadem eſt cum proportione, quæ eſt inter diametros ſphærarum Bk, RZ (nam ut jam oſtendi FC eſt ad XE, ut CO ad ES; hoc eſt ut Bk ad RZ, ipſarum CO, ES per conſtr. æquè multiplices.) Ergo ratio cylindrorum FL, XQ eſt triplicata rationis diametrorum Bk, RZ. Eodem modo demonſtrabimus, ſingulos cylindros hemiſphærio uni inſcriptos ad cylindros ſingulos inſcriptos alteri hemiſphærio rationem habere triplicatam rationis diametrorum Bk, RZ. Ergo etiam ratio ſimul omnium ad omnes ſimul *i* triplicata eſt rationis diametrorum Bk, RZ. Quare cùm aggregata cylindrorum tandem in hemiſpheria *k* deſinant, hemiſphæriorum quoque, ac proinde & ſphærarum ratio triplicata erit *n* rationis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

b Per 35. l. 5.
c Per 22. l. 5.
d Per defin. 4. l. 12.
e Per 21. l. 12.
i Per 12. l. 5.
k per lem. præced.
n Per poriſ. univ.

Corollarium.

NOta igitur: proportione diametrorum etiam ſphærarum proportio innoteſcit, ut ſi minoris diameter ſit unius pedis, majoris 10. continuetur ratio 1. ad 10. per quatuor terminos 1. 10. 100. 1000. ut 1. ad 1000. quartum terminum, ita ſphæra minor ad majorem.

Conorum, Cylindrorum, ſpheræ dimenſio

dabitur lib. ſeq. ex Archimede.

Scholium.

Quemadmodum ſimiles planæ figuræ per mediam proportionalem unam, ita corpora ſimilia non niſi per medias duas in proportione data augentur, vel diminuuntur.

Fig. 28. *Data ſit ſphæra, vel cubus, vel aliud corpus quodcunque, cujus radius, ſive latus ſit A. Data item ſit proportio quæcunque A ad* B, *ut dupla. Oporteat exhibere corpus & duplum dati, & ſimile.*

Inter terminos rationis datæ A, & B *inveniantur duæ mediæ proportionales X, Z, ut docuimus in ſcholio poſt* 13. *l.* 6. *ſphæra, cujus radius eſt X, ſive corpus dato ſimile factum ſuper latere X erit duplum dati.*

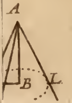
Nam corpora ſimilia, quorum radii, ſeu latera ſunt A, & X, rationem inter ſe habent triplicatam a *rationis A ad X; hoc eſt, eandem,* b *quam A habet ad* B.

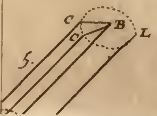
a Coroll. 2 p. 9. & per 12. ac 18. lib. 12.
b Per defin. 10. l. 5.

Atque hoc eſt celebratiſſimum illud problema, quod Deliacum à Deliaco Apolline dictum eſt, quòd is lue ſæviſſima Athenas populante conſultus reſpondiſſet, peſtem ceſſaturam, ſi ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus lib. 8.

AN-

Tabula.





ANDREÆ

TACQUET

E SOCIETATE JESU

SELECTA

EX ARCHIMEDE

THEOREMATA,

Via faciliori, ac breviori demonſtrata, & novis inventis aucta.

PATAVII,

M. DC. XCI.

Typis Seminarii Patavini.

SUPERIORUM PERMISSU.

LECTORI.

QUamvis in Mathematicis diſciplinis complures ſummi, & admirabiles viri extiterunt, prima tamen gloria communi quodam conſenſu Archimedi Syracuſano delata eſt. Sed illum plures laudant, quàm legant, admirantur plures, quàm intelligant. Cauſæ, opinor, ſunt exemplarium moles, & raritas, ſermonis ex Græco translati obſcuritas nonnulla, demonſtrationes prolixæ, & arduæ. Putavi igitur ex ſtudioſæ juventutis uſu futurum, ſi elementis jam illuſtratis, hæc à me ſelecta ex Archimede theoremata, & via multò faciliori, ac breviori demonſtrata ſubnecterem. Selegi porrò ea, quæ & admirationis plus, & utilitatis habent, viamque in demonſtrando eam tenui, ut ſperem, eum, qui elementa perceperit, hæc ſummi Geometræ præclariſſima inventa negotio haud magno aſſecuturum. Sub finem adjectis tre-

decim

decim propoſitionibus Archimedis de cylindro,& ſphæra doctrinam ampliorem ſacio, atque inter cætera demonſtro ſeſquialteram proportionem in tribus corporibus ſphæra, cylindro, & æquilatero cono, utroque ſphæræ circumſcripto, continuari. Varia inſuper ſparſim, inter quæ propoſitio 12, *&* co*rollaria prop.* 14. *præcipua ſunt, & ſcholia omnia adjeci. Fruere iſtis, quiſquis Geometriæ candidatus es, & quantùm ex Euclide profeceris, in Archimede experire. Cùmque in veritatum pulcherrimarum contemplatione defigi te, evebique ſurſum perſenſeris, mentem ab infimis biſce rebus feliciter jam avulſam attolle etiam altiùs, atque dirige ad veritatem primam æternam, immenſam, quæ Deus eſt, cujus ineffabili viſione nos futuros aliquando æternùm beatos confido. Vale.*

DEFINITIONES,

Seu vocum nonnullarum explicatio.

ESto circulus BECG, cujus centrum A, diameter BC, quam ad rectos angulos ſecet recta EG non per centrum, videlicet in D. Ex centro autem educantur radii AE, AG. His poſitis. *Fig. 23. ex Archimede.*

1 Sector ſphæræ eſt, qui à ſectore circulari AECG, ſeu AEBG circa diametrum BC in orbem acto producitur.

2 Segmentum, ſeu portio ſphæræ eſt, quæ à circulari ſegmento ECG, ſeu EBG circa eandem diametrum BC in orbem acto deſcribitur.

3 Portionis ſphæricæ (EBG) vertex eſt diametri immobilis extremitas B. Baſis eſt circulus à recta EG deſcriptus. Axis eſt diametri pars BD inter verticem B, & D centrum baſeos intercepta.

4 Cùm ſphæricę portionis, aut corporis ei inſcripti, aut coni ſuperficiem nomino, ſemper intelligo abſque baſi; & dum cylindri ſuperficiem dico, intelligo ſimiliter abſque baſibus, niſi adjungatur (*tota*), tunc enim accipiuntur & baſes.

Rursùm cùm de cylindris, vel conis ago, non alios intelligo quàm rectos.

Axiomata.

Fig. 1. & 16. 1 POlygoni circulo inſcripti ambitus minor eſt circuli peripheria.

Fig. 1. 2 Polygoni circulo circumſcripti ambitus circuli peripheria major eſt.

Fig. 16. 3 Quod ſi polygonum circulo inſcriptum circa diametrum (A E) unà cum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti ſuperficies minor ſphæræ ſuperficie. Et ſi polygonum circulo circumſcriptum circa diametrum unà cum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti ſuperficies major ſuperficie ſphæræ.

Fig. 17. 4 Similiter ambitus polygoni inſcripti ſegmento circulari (D A F) minor eſt peripheria ſegmenti (D A F.) Et ſi polygonum ſegmento inſcriptum unà cum ſegmento circa ſegmenti axem (A O) circumagatur, erit corporis à polygono geniti ſuperficies minor ſuperficie portionis ſphæricæ (D A F.)

Fig. 3. & 6. 5 Superficies priſmatis cylindro inſcripti minor eſt cylindri ſuperficie, cirumſcripti verò major.

Fig. 4. & 8. 6 Et ſuperficies pyramidis cono inſcriptæ minor eſt coni ſuperficie, circumſcriptæ autē major.

PROPOSITIO I.

DAtæ ſint figuræ quæcunque ſeu planæ, ſeu ſolidæ A, B. Sint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ figuras datas A, ac B ſemper minùs, ac minùs excedendo in ipſas a *deſinant, & tamen ſemper inter ſe æquales ſint.*

a Defin. 6. lib. 12.

Dico

Dico etiam figuras A, & B æquales eſſe.

Si non, alterutra major erit: ſit ergo A major quàm B exceſſu X. Per hypotheſim dantur magnitudines E, F inter ſe æquales, quæ excedunt figuras A, B exceſſu minori, quàm X, quo A ponitur ſuperare B. Ergo F minor eſt quàm A. Sed F per hypotheſim eſt æqualis E. Ergo etiam E minor eſt quàm A, quod eſt abſurdum; cum per hyp. E excedat A. Eodem modo oſtendam B non poſſe eſſe majorem quàm A. Ergo cùm neutra ſit major altera, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

E. F.
A. B. X.

PROPOSITIO II.

Datæ ſint figuræ A, & B; ſint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ à figuris datis ſemper minùs, ac minùs deficiendo in ipſas b *deſinant, & ſemper inter ſe æquales ſint.* b *Defin.6. lib.12.*

Dico etiam figuras datas A, B æquales fore.

A. B. Z.
O. P.

Si non, alterutra minor erit. Eſto igitur A minor quàm B defectu Z. Per hypotheſim dari poſſunt magnitudines O, P inter ſe æquales, quæ deficiant à figuris datis A, & B defectu minori quàm Z, quo ponitur A deficere à B. Ergo P major eſt quàm A. Sed P per hypotheſim eſt æqualis O. Ergo etiam O major eſt quàm A, quod repugnat hypotheſi, qua ſtatuitur O minor quàm A. Eodem modo oſtendam B non eſſe minorem quàm

quàm A. quare cum neutra ſit minor altera, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Fig. 1. ex Archim. A*Mbitus polygonorum circulo circumſcriptorum, & inſcriptorum deſinunt in circuli peripheriam. Similiter & polygona ipſa in circulum deſinunt.*

Si nimirùm arcubus ſine fine biſectis plura ſemper, ac plura latera circulo circumſcribantur, & inſcribantur.

1 Pars. Intelligantur circulo inſcripta, & circumſcripta polygona ordinata, ſive ut traditur p. 12. lib. 4. ſive ut in hac figura, perinde erit. Manifeſtum eſt *a* FI eſſe ad EC (hoc eſt *b* totum ambitum circumſcriptum ad totum ambitum inſcriptum) ut IA eſt ad CA. Atqui IC exceſſus rectæ IA ſupra CA fit tandem quacunque data minor, ſi plura ſemper, ac plura in infinitum latera circumſcribi, & inſcribi intelligamus. Ergo etiam exceſſus ambitus circumſcripti ſupra ambitum inſcriptum tandem fiet quovis dato minor. Ergo multò *c* magis exceſſus ambitus circumſcripti ſupra peripheriam fiet quocumque dato minor. Similiter, quia jam oſtendi defectum ambitus inſcripti ab ambitu circumſcripto fieri quovis dato minorem, multò *o* magis defectus inſcripti ambitus à peripheria fiet quovis dato minor. Ambitus igitur tàm inſcripti, quàm conſcripti in pheripheriam *d* deſinunt. Quod erat primum. Hæc ulteriùs demonſtrare operæ pretium non eſt, cùm ſatis ſint manifeſta.

a Per coroll. 1. p. 4. l. 6.
b Per 12. l. 5.
c Patet ex axiom. 2.
o Patet ex axiom. 1.
d Per defin. 6. l. 12.

2 Pars. Quia jam oſtenſum eſt exceſſum lateris FI ſupra latus EC fieri tandem quovis dato minorem (eſt enim FI ad EC, ut IA ad CA) etiam exceſſus quadrati FI ſupra quadratum EC fiet quovis dato minor. Sed ut quadratum FI ad quadratum EC, ita *e* polygonum circumſcriptum ad polygonum inſcriptum. Ergo etiam exceſſus polygoni circumſcripti ſupra inſcriptum tandem fiet dato minor. Ergo multò magis exceſſus polygoni circumſcripti ſupra circulum tandem fiet dato minor; ac proinde & polygoni inſcripti defectus à circulo dato minor aliquando erit. Igitur polygona circulo tàm inſcripta, quàm circumſcripta in circulum *i* deſinunt. Quod erat alterum. *e Per 22. l.6.* *i Defin. 6. lib. 12.*

PROPOSITIO IV.

Polygonum o ordinatum circulo conſcriptum (FI NTR) æquatur triangulo, cujus baſis eſt ambitus polygoni, altitudo verò circuli radius. *Fig. 1.* *o Defin. 3. l. 4.*

Et polygonum ordinatum circulo inſcriptum æquatur triangulo, cujus baſis eſt polygoni inſcripti ambitus, altitudo verò perpendicularis (AO) in latus unum ex centro ducta.

1. Pars. Radius AB ad contactum ductus *a* eſt perpendicularis ad tangentem IF. Quare ſi ductis rectis AF, AI, AN, &c. polygonum reſolvatur in triangula, erit radius AB communis omnium altitudo, adeoque triangula ipſa liquet eſſe æqualia. Ergo triangulum baſim habens parem ſummæ laterum FI, IN, NT, &c. altitudinem verò AB æquabitur illis *b* omnibus, hoc eſt toti polygono circumſcripto. *a Per 18. l. 3.* *b Patet ex 1. l. 6.*

2. Pars

2 Pars. Simili ferè ratiocinio concludetur.

PROPOSITIO V.

Fig. 2. *Circulus eſt æqualis triangulo, cujus baſis eſt peripheria circuli, altitudo autem ſemidiameter.*

Polygona ordinata circulo circumſcripta, & triangula baſes habentia ambitum polygoni, altitudinem verò radium circuli, ſemper ſunt *a* æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum circumſcripta in circulum *b* deſinunt, ſimiliterque triangula (ut mox oſtendam) quæ pro baſi habent ambitum polygoni circumſcripti, pro altitudine verò radium A B, tandem deſinunt in triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium A B. ergo *c* circulus, & triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium A B æqualia ſunt.

a Per præc.
b Per 3, hujus.
c Per 1. hujus.

Quòd autem triangula ſub ambitu polygoni, & radio deſinant in triangulum ſub peripheria, & radio, ſic oſtendo. Triangula ſub ambitu circumſcripti polygoni, & radio A B ſunt ad triangulum ſub peripheria, & radio A B, ut *i* baſis ad baſim, nempe ut ambitus polygoni ad peripheriam, cùm altitudinem habeant communem. Sed ambitus polygoni in peripheriam k deſinit. Ergo & triangula deſinent in triangulum.

i Per 1. l. 6
k Per 3. hujus.

Corollaria.

1 EX hac & 41. l. 1. patet, rectangulum ſub radio, & dimidia circumferentia eſſe æquale circulo: ſub radio, & tota circumferentia eſſe duplum

duplum; ſub tota diametro, & tota circumferentia eſſe quadruplum circuli.

2 Circulus eſt ad quadratum ſibi inſcriptum, ut circumferentia dimidia (CDE) ad diametrum; ad quadratum verò circumſcriptum, ut quarta circumferentiæ pars ad diametrum. *Fig. 5. l. 4.*

Nam rectangulum ſub CDE, & radio CA, ſeu GF (hoc *d* eſt ipſe circulus) eſt ad rectangulum GFCE, nimirùm ſub FG, & CF, (hoc eſt ad quadratum inſcriptum BCDE) ut *e* CDE dimidia circumferentia eſt ad FG, ſeu CE diametrum; quod erat primum; ac proinde circulus eſt ad duplum rectanguli GFCE (hoc eſt ad FH quadratum circumſcriptum), ut CDE ad duplam diametrum CE, ſive ut quadrans CD ad diametrum CE. *d Per coroll. præc.* *e Per 1. l. 6.*

PROPOSITIO VI.

Circuli circumferentia diametrum continet minùs quàm ter, & unam ſeptimam (ſeu $\frac{10}{70}$), plus verò quàm ter, & $\frac{10}{71}$.

Ad hujus Theorematis demonſtrationem aſſumit Archimedes polygona ordinata alterum circulo circumſcriptum, inſcriptum alterum, utrumque 96 laterum. Deinde oſtendit 96 latera circulo circumſcripta continere diametrum minùs quàm ter & $\frac{1}{7}$: ac proinde circumferentiã, quæ ipſis minor eſt, etiam continere diametrum minùs quàm ter, & $\frac{1}{7}$. Latera verò 96 circumferentiæ inſcripta (ac proinde & circumferentiam, quæ ipſis minor eſt) amplius continere dia-

diametrum, quàm ter, & $\frac{10}{71}$. Porrò longior eſt hujus rei demonſtratio, quàm ut hoc loco adferri debeat. Quòd ſi ad polygona plurium adhuc laterum Geometricum ratiocinium velimus extendere, limites jam ſtatutos arctare poterimus magis, magiſque ſine termino, atque ita propius in infinitum ad veram proportionem accedere. Præſtitum eſt hoc à Ludolpho Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio, aliiſque. Proportiones præcipuas hactenùs inventas hìc ſubjicio.

Prima eſt Archimedis hujuſmodi

Diameter 7

Circumfer. 22. major vera.

Diameter 71

Circumf. 223. minor vera

Rationes 22. ad 7, & 223 ad 71. ſi ad commune conſequens reducantur (quod fit eodem modo, quo fractiones revocantur ad eundem denominatorem) rationes orientur 1562 ad 497, & 1561 ad 497.

Poſita igitur diametro partium 497
erit circumferentia major vera 1562
& circumferentia minor vera 1561

Utraque igitur à vera differt quantitate minori, quàm ſit $\frac{1}{497}$ pars diametri. Quòd ſi rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantur ad commune conſequens, provenient rationes 1561 ad 4906, & 1562 ad 4906.

Poſita igitur circumferentia partium 4906,
erit diameter minor vera 1561.
diameter major vera 1562.

Utraque igitur à vera diametro differt quantitate minori, quàm ſit pars $\frac{1}{4900}$ circumferentiæ.

Proportio tradita à Metio eſt Archimedæa multò

tò accuratior. Juxta hanc eſt.

Diameter 113.

Circumf. 355.

Inter omnes parvis numeris conſtantes nulla veræ propinquior: ex hac enim, poſita diametro 10, 000, 000, provenit circumferentia 31, 415, 929, quæ à vera ſolùm penes notam primam 9 differt exceſſu paulò majore, quàm ſint duæ particulæ decimillioneſimæ diametri.

Sed utraque multò exactior eſt gemina illa Ludolphi à Ceulen: prioris termini conſtant notis 21, poſterioris verò notis 36.

Diameter

100000000000000000000

Circumf. major vera

314159265358979323847.

Circumf. minor vera

314159265358979323846.

Differentia utriuſque circumferentiæ eſt particula una diametri denominata à numero, qui conſtat unitate, & 20 cifris, ac proindè tàm hæc, quàm illa à vera circumferentia differt minori quantitate, quàm ſit diametri particula dicta, videlicet centies millioneſies millioneſies millioneſima

Diameter

10000000000000000000000000

0000000000

Circumf. major vera.

314159265358979323846264338

327950289

Circumf. minor vera.

314159265358979323846264338

327950288.

Differentia utriuſque circumferentię, inter quam vera exiſtit, eſt diametri particula una denominata à numero, qui conſtat unitate, & 35 cifris, quæ particula ad diametrum minorem habet proportionem, quàm arenula una ad orbem terræ. Non enim conſtat orbis terræ tot arenulis, quot continentur particulæ tales in diametro.

Fruſtrà igitur ſit ulteriùs progredi. Progrediere nihilominus ultra in infinitum, ſi ratiocinium Geometricum, cujus methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

Scholium.

PRoportionis jam traditæ fructus eximii ſunt hi, qui ſequuntur.

Inventio Diametri ex circumferentia.

MAjorem terminum unius è proportionibus jam traditis ſtatue primo loco, minorem ſecundo, circumferentiam tertio; his tribus numeris quæratur per regulam auream quartus proportionalis; is erit quæſita diameter.

Ut ſi detur circumferentia maximi circuli terræ milliaria continere Belgica unius horæ 8640, & quæratur terræ diameter, ſic ſtabunt termini

355 —— 113 —— 8640——

multiplica jam ſecundum per tertium, & productum divide per primum; proveniunt milliaria Belgica 2750 $\frac{14}{71}$ *pro diametro orbis terræ.*

In-

Inventio circumferentiæ ex Diametro.

TErminus minor unius è proportionibus ſuprà traditis ſtatuatur primo loco: major ſecundo: Diameter nota tertio. His tribus numeris quæratur quartus proportionalis. Is dabit quæſitam circumferentiam.

Ut ſi detur orbis terræ diameter continere milliaria Belgica unius horæ 2750 $\frac{14}{71}$ *& quæratur ambitus; termini ita ſtabunt:*

113 —— 355 —— 2750 $\frac{14}{71}$ ——

Tunc ſecundum multiplica per tertium, & productum divide per primum: provenient milliaria Belgica 8640. *pro ambitu orbis terræ.*

Quàm modicè hæc circumferentia veram excedat, dictum eſt ſuprà, exceſſu videlicet paulo majore, quàm ſint diametri terreſtris duæ particulæ decimillioneſimæ, hoc eſt 9 circiter aut 10 *pedibus Rhynlandicis, quorum* 18000 *conſtituunt milliare horarium. Quòd ſi utamur proportione Ludolphina etiam priori, cujus termini conſtant* 21 *notis invenietur circumferentia inſenſibiliter à vera differens non ſolùm diametro data milliariorum Belgicorum* 2750, *qualis eſt terræ; verùm etiam licet diameter ponatur centum milliarium eorundem milliariorum, qualis fortaſsè eſt diameter firmamenti; hac enim poſita proveniet circumferentia minori quantitate à vera differens, quàm una centimillioneſima particula pedis Rhynlandici. Quòd ſi ad inveſtigandam circumferentiam orbis terræ utamur proportione Archimedis, intervallum circumferentiarum vera majoris, ac minoris excedet* 5 *milliaria* Belgica. *Non eſt igitur adhibenda*

da Archimedæa proportio, niſi in quantitate parva; imò ſemper expediet Metiana uti, quæ & modicis conſtat terminis, & pluſquam millies exactior eſt.

Circuli dimenſio.

SEmidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli: quemadmodum patet ex coroll. 1. p. 5. hujus.

Ut ſi ſemidiametrum orbis terræ, quæ neglecta fractione continet milliaria Belgica 1375, multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempe Belgica 4320; provenient milliaria Belgica quadrata 5,940,000 pro circulo maximo terræ. Differentia inventa circularis areæ à vera habetur, ſi differentia inventæ circumferentiæ dimidiæ vera ducatur in ſemidiametrum datam, aut ſi differentia ſemidiametri inventæ à vera ducatur in datam ſemicircumferentiam.

Dimenſio cylindrorum, & Conorum.

EAm hìc appono, quòd à circuli dimenſione pendeat. Cylindrus igitur, & priſma quodvis producitur ex altitudine multiplicata per baſim. Conus, & pyramis ex tertia altitudinis parte in baſim ducta, ſunt enim partes tertiæ cylindrorum, ac priſmatum eandem cum ipſis baſim, & altitudinem habentium per 10, & 7. lib. 12.

Sit baſis cylindri, aut coni 50 ped. quadratorum, altitudo pedum 100. Duc 100 in 50, proveniunt 5000 pedes cubici pro ſoliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis 100, nimirum $33\frac{1}{3}$ in 50 proveniunt $1666\frac{2}{3}$ pedes cubici pro ſoliditate coni.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Irculorum peripheriæ eam inter ſe proportionem habent, quam diametri. Fig. 6. & 7 l. 12.

Nam polygonorum ſimilium circulo ſine fine inſcriptibilium ambitus ſunt inter ſe ſemper, ut *a* diametri AF, & IC. Sed hi *b* ambitus in peripherias deſinunt. Ergo *c* etiam peripheriæ ſunt inter ſe ut diametri. Quod erat demonſtr.

a Per coroll. p. 1. l. 12.
b Per 3. hujus.
c Per Poriſ. univ. l. 12.

PROPOSITIO VIII.

Uperficies priſmatis Cylindro tàm circumſcripti, quàm inſcripti æquatur rectangulo, cujus altitudo eſt latus cylindri, baſis verò æqualis perimetro baſis priſmaticæ. Fig. 3.

1. Pars. Priſmatis conſcripti ſuperficies tangit cylindrum ſecundùm lineas EA, NF, &c. quæ ſunt cylindri latera; hæc autem (quòd ex hyp. cylindrus ſit rectus) ad planum baſeos recta ſunt, ac proinde etiam *d* recta ad lineas CG, GM, &c. Sunt verò & æqualia inter ſe. Igitur unum cylindri latus communis eſt omnium rectangulorum CO, OM, MH, &c. altitudo. Conſcripti igitur priſmatis ſuperficies æquatur *f* rectangulo ſub ambitu baſis priſmacæ, & priſmatis, ſeu cylindri latere contento.

d Per defin. 3. l. 11

Eadem eſt ratio ſecundæ partis, nam latus cylindri communis rursùm eſt altitudo rectangulorum BDIk, kIQP &c. quæ conſtituunt ſuperficiem priſmatis inſcripti.

f Patet ex 1. lib. 6.

PROPOSITIO IX.

Fig. 4. *Pyramidis ordinatæ cono recto circumſcriptæ ſuperficies æqualis eſt triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia (FHLD), altitudo autem latus coni (BG.)*

Et pyramidis ordinatæ cono recto inſcriptæ ſuperficies æquatur triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia, altitudo verò perpendicularis (BO) à vertice in latus baſeos deducta.

1 Pars. Ducantur ad contactus G, k, M rectæ BG, Bk, BM. Erunt hæ recti coni latera, ac proinde æquales. Et quia axis BA *a* rectus eſt baſis plano FkD, etiam planum *b* GBA plano FkD rectum erit. Atqui HG perpendicularis *c* eſt ad AG communem ſectionem planorum FkD, & GBA. Ergo HG etiam *d* recta eſt plano GBA, ac proinde perpendicularis quoque eſt ad *e* ipſam BG. Ergo BG latus coni, eſt altitudo trianguli FBH. Eodem modo latus coni erit altitudo reliquorum HBL, LBD &c. Igitur triangulum circumferentia FHLD, & latere coni comprehenſum æquatur ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ abſque baſi. Quod erat primum.

a Per hyp.
b Per 18. l. 11.
c Per 18. l. 3.
d Collig. ex defin. 4. l. 11.
e Per defin. 3. l. 11

2 Partis ſimilis ferè demonſtratio eſt.

PRO.

PROPOSITIO X.

Superficies priſmatis ordinati cylindro recto circumſcripti deſinit a in cylindri ſuperficiem: & pyramidis cono recto circumſcriptæ ſuperficies in coni ſuperficiem deſinit. *Fig. 3. & 4.* *a Defin. 6. l. 12.*

1 Pars. Priſmatum ordinatorum cylindro ſine fine conſcriptorum, & inſcriptorum ſuperficies habebunt tandem inter ſe differentiam data minorem, uti facilè patebit ex 8, & 3. hujus. Multò igitur magis ſuperficies circumſcripti priſmatis à ſuperficie cylindri inter inſcriptam, & circumſcriptam media differet differentia minori quacunque data; hoc eſt, *b* deſinet in cylindricam ſuperficiem minùs ſemper, ac minùs excedendo. *b Per defin. 6. l. 12.*

2 Pars. Eodem modo oſtenditur ex 9, & 3. hujus.

In figuris tantùm exhibentur cylindri, & coni ſemiſſes, ne multitudo linearum confuſionem pareret. Cæterùm cogitandi ſunt cylindrus, & conus integri, quos priſmata, & pyramides circumſcriptæ ambiunt. Sic enim clariùs apparet, planas ſuperficies circumſcriptas eſſe majores, ex 3 axiomate.

Lemma ad ſequen.

Sint AB, CD, EF proportionales, ſitque KB dimidia AB, & EG dupla EF; etiam KB, CD, EG proportionales erunt. *Fig. 7.*

Recta kB eſt ad AB, ut EF ad EG. Rectangulū ergo kB, EG æquatur per 16. l. 6. rectāgulo AB, EF.

EF. Sed hoc per 17. l. 6. æquatur quadrato CD. Ergo & rectangulum KB, EG par eſt quadrato CD. Ergo per 17. lib. 6. KB, CD, EG ſunt proportionales.

PROPOSITIO XI.

Fig. 5. & 6.

Circulus, cujus radius (GH) eſt medius proportionalis inter recti cylindri latus (BC), & baſeos diametrum (BD) æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ.

Intelligantur circulis ABN, GPH circumſcripta eſſe ordinata polygona; adeoque ſimilia NM, RS, & ſuper NM polygono erectum eſſe priſma cylindro circumſcriptum. Quoniam BD, GH, BC ex hyp. ſunt proportionales, etiam AD (ſeu AN) GH & dupla BC *o* proportionales erunt. Jam triangulum ſub AN, & ambitu polygoni MN contentum *a* æquatur polygono conſcripto NM; rectangulum verò ſub BC, ſeu EF, & eodem ambitu NM (hoc eſt *b* triangulum ſub ambitu NM, & dupla BC) æquale eſt *c* ſuperficiei priſmatis cylindro conſcripti. Atqui triangulum ſub ambitu NM, & AN eſt ad triangulum ſub ambitu NM, & dupla BC, *o* ut AN ad duplam BC. Ergo etiam polygonum NM eſt ad ſuperficiem priſmatis cylindro conſcripti, ut AN ad duplam BC. Sed quia jam oſtendi AN, GH, duplam BC eſſe proportionales, ratio AN ad duplam BC eſt duplicata *d* rationis AN ad GH. Ergo polygonum NM ad ſuperficiem priſmatis rationem habet duplicatam rationis AN ad GH. Sed etiam polygonum NM ad ſimile ſibi polygonum GRQS rationem habet duplicatam rationis AN ad

o Per lem.
a Per 4. hujus.
b Patet ex 41. lib. 1.
c Per 8. hujus.
o Per 1. l. 6.
d Per defi. 10. lib. 5.

GH, ut facilè colligitur ex 1. lib. 12. Ergo polygonum NM ad ſuperficiem priſmatis, & ad polygonum GRQS eandem habet rationem; quæ proindè æqualia *e* ſunt. Eodem modo oſtendam, priſmaticas ſuperficies cylindro in infinitum circumſcriptibiles ſemper æquales eſſe polygonis, quæ circulo GPH in infinitum circumſcribi poſſunt. Quare cùm & ſuperficies priſmaticæ *f* in cylindri ſuperficiem, & polygona *i* in circulum GPH deſinant, etiam cylindri ſuperficies circulo GPH æqualis *k* erit. Quod erat dem.

e Per 9. l. 5.
f Per 10. hujus.
i Per 3. hujus.
k Per 1. hujus.

Ex egregio hoc theoremate exhibetur circulus æqualis ſuperficiei cylindricæ.

Corollaria.

1 *Superficies cylindri recti æqualis eſt rectangulo ſub latere* BC, *& baſeos peripheria contento.* *Fig. 5. & 6.*

Dupla BC (ut oſtenſum ſuprà) eſt ad GH, ut GH ad BA, ſeu AN; hoc eſt, ut *n* peripheria P ad peripheriam BN. Ergo triangulum ſub prima nempè dupla BC, & quarta nempè peripheria BN æquatur *p* triangulo ſub ſecunda GH, & tertia, peripheria ſcilicet P. Sed triangulum ſub GH, & peripheria P æquale *q* eſt circulo GPH; hoc eſt, *r* ſuperficiei cylindricæ. Ergo etiam triangulum ſub dupla BC, & peripheria BN (hoc eſt, *ſ* rectangulum ſub BC, & peripheria BN) cylindricæ ſuperficiei æquale erit. Quod erat demonſtr.

n Per 7. hujus.
p Patet ex 16. lib. 6.
q Per 5. hujus.
r Per 11. hujus.
ſ Patet ex 41. l. 1.

Ex hoc corollario manifeſtum eſt rectangulorum proprietates ſuperficiebus cylindricis rectis eſſe com-

communes. Eſto igitur corollarium.

Fig.20.& 21.l.12. 2 Cylindricæ ſuperficies (BM, QN) æquè altæ ſunt inter ſe, ut baſium diametri (BF, QR.)

Nam rectangula ſub peripheriis CL, SE, & rectis æqualibus FM, RN comprehenſa, quibus cylindricæ ſuperficies *d* ſunt æquales, ſunt inter ſe *e* ut baſes peripheriæ videlicet CL, SE; hoc eſt *f* ut diametri BF, QR.

d Per coroll.1.
e Per 1.l.6
f Per 7. hujus.

Fig.23.& 24.l.12. 3 Cylindricæ ſuperficies (CI, AR), quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe ut altitudines (TI, BR.)

Rectangula enim ſub æqualibus per hyp. peripheriis GH, MQ, & lateribus TI, BR contenta, quibus ſuperficies *g* cylindricæ ſunt æquales, ſunt inter *i* ſe, ut TI, BR.

g Per coroll.1.
i Per 1.l.6

Fig.20.& 21.l.12. 4 Similes cylindricæ ſuperficies (BM, RI) rationem habent duplicatam ejus, quam habent baſium diametri (BF, QR.)

Cùm cylindri ponantur ſimiles, erit MF ad IQ, *o* ut BF ad QR, hoc eſt, *p* ut peripheria CL ad peripheriam SE. Quare etiam rectangula ſub peripheriis CL, SE, & lateribus MF, IQ contenta ſimilia erunt, ac proinde rationem inter ſe habebunt *l* duplicatam ejus, quam habet MF ad IQ; hoc eſt BF ad QR. Ergo & cylindricæ ſupeficies &c.

o Defin.4. l.12.
p Per 7. hujus.
l Per 20. l.6.

Fig.eadē. 5 Cylindricæ ſuperficies (BM, RI) rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (FM, IQ), & diametrorum (BF, QR), quæ ſunt in baſibus.

Fig.24.& 25.l.12. 6 Si æquales ſunt cylindricæ ſuperficies (AR, FD), erit ut diameter AB ad diametrum FN, ita reciprocè altitudo FH ad altitudinem RB, & è converſo.

7 Denique ex eodem 1. coroll. habetur cylindricæ

dricæ ſuperficiei dimenſio, ſi nimirum altitudo ducatur in baſeos peripheriam, ut ſi altitudo ſit pedum 20, peripheria baſis pedum 6; multiplica 20 per 6, proveniunt 120 pedes quadrati pro cylindrica ſuperficie.

PROPOSITIO XII.

Cylindri recti ſuperficies eſt ad baſim (ABN), ut cylindri latus (CB) ad (BO) quartam partem diametri baſeos. Fig. 6. & 5.

Sit GH media proportionalis inter BC, & BD diametrum baſis, ac proinde etiam media *a* proportionalis inter BA, ſeu AN, & duplam BC. Circulus GPH radii GH æquatur curvæ ſuperficiei *b* cylindricæ CD. Sed circulus GPH ad cylindri baſim ABN rationem habet duplicatam *c* rationis GH ad AN; hoc eſt *d* eandem, quam dupla BC ad BA radium; hoc eſt eandem, quam BC ad BO quartam diametri partem. Ergo etiam ſuperficies cylindrica eſt ad baſim ABN, ut BC ad BO quartam partem diametri BD. Quod erat demonſtrandum.

a Per lem. ante p. 11. hujus. *b Per 11. hujus.* *c Per 2. l. 12.* *d per hyp. & def. 10. lib. 5.*

Corollarium.

Superficies cylindri habentis latus diametro baſis æquale, baſeos quadrupla eſt. Si verò latus fuerit quarta pars diametri baſeos, ſuperficies cylindri baſi æqualis erit. Utrumque ex propoſitione manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XIII.

Circulus, cujus radius (OL) eſt medius proportionalis inter coni recti latus (BC), & baſis radium (AC,) æqualis eſt ſuperficiei conicæ. Fig. 9. & 8.

In-

Intelligantur circulis A C G, O P L circumſcripta eſſe polygona ordinata E F, IN, & ſuper polygono E F erectam eſſe pyramidem cono circumſcriptam.

Quoniam per hyp. A C, ſeu A G eſt ad O L, ut O L ad B C, erit ratio A G ad B C duplica-
a defi. 10. *l.* 5. ta *a* rationis A G ad O L. Sed ut A G ad B C, ita triangulum ſub A G, & ambitu E F eſt ad triangulum ſub B C, & eodem ambitu E F. Ergo ratio trianguli ſub A G, & ambitu E F ad triangulum ſub B C, & eodem ambitu eſt etiam duplicata rationis A G ad O L. Sed triangulum
b Per 4. *hujus.* ſub A G, & ambitu E F æquale eſt *b* polygono
c Per 9. *hujus.* E F, & triangulum ſub B C, & eodem ambitu E F æquale *c* eſt ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ. Ergo ratio polygoni E F ad ſuperficiem pyramidis etiam eſt duplicata rationis A G ad O L. Atqui etiam ratio polygoni E F ad polygonum ſibi per conſtr. ſimile I N eſt duplicata
d Per 1. *l.* 12. *d* rationis A G ad O L. Ergo polygonum E F ad ſuperficiem pyramidis, & ad polygonum I N eandem habent rationem, quę proinde ęqua-
e Per 9. *l.* 5. lia *e* erunt. Eodem modo oſtendam ſuperficies pyramidum, quæ cono in infinitum magis magiſque polygonæ circumſcribi poſſunt, ſemper æquales eſſe polygonis; quæ circulo O P L poſſunt circumſcribi etiam in infinitum. Quare,
f Per 19. *hujus.* cùm & pyramidum *f* ſuperficies in coni ſuperficiem, & polygona in circulum, O P L tandem
i Per 3 *hujus.* deſinant, etiam coni *l* ſuperficies, & circulus O P L erunt æqualia. Quod erat dem.
l Per 1. *hujus.* *Ex hoc præclaro theoremate exhibetur circulus ſuperficiei conicæ æqualis.*

Corol-

Corollaria.

1 R*Ecti coni ſuperficies æqualis eſt triangulo ſub coni latere (BC), & baſeos peripheria (CG) comprehenſo.* *Fig. 8. & 9.*

Sit OL radius media proportionalis inter AC, & BC. Quia peripheria CG eſt ad peripheriam P, ut *a* radius AG ad radium OL; hoc eſt per hyp. ut OL ad BC, erit triangulum ſub prima, nempè peripheria CG, & ſub quarta BC *b* æquale triangulo ſub ſecunda, nempè peripheria P, & tertia OL; hoc eſt *c* circulo OPL, hoc eſt *d* ſuperficiei conicæ BCD. Quod erat demonſtrandum.

a Per 7. hujus. *b Patet ex 16. l. 6.* *c Per 5. hujus.* *d Per hanc. 13.*

Ex hoc corollario liquet ſuperficies conicas triangulorum ſubire leges. Itaque.

2 Superficies conicæ BAF, QXR æqualia latera BA, QX habentes ſunt inter ſe, ut baſium diametri BF, QR. *Fig. 20. & 21. lib. 12.*

3 Et (CFT, AZB), quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe, ut latera (CF, AZ.) *Fig. 23. & 24. lib. 12.*

4 Et, quæ ſimiles ſunt (BAF, QZR), duplicatam habent rationem ejus, quæ eſt inter baſium diametros. *Fig. 20. & 21. lib. 12.*

5 Et quælibet rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (BA, QZ,) & diametrorum (BF, QR), quæ ſunt in baſibus. *Fig. ead.*

6 Et, quæ æquales ſunt, reciprocant latera, & baſium diametros; & quæ reciprocant, ſunt æquales.

Quæ omnia demonſtrantur ex coroll. 1. ut ſuprà colloraria de cylindrica ſuperficie deduximus ex corollario iſthic primo.

7 Metiemur denique conicam ſuperficiē, ſi latus *Fig. 25. l. 12.*

F C

FC per baſeos peripheriam dimidiam multiplicemus. Ut ſi latus ſit pedum 5, peripheria baſeos pedum 10, duc 5 per 10, proveniunt 50 pedes quadrati pro conica ſuperficie. Dem. patet ex eodem 1. coroll.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 8. & 9. Archim. *Coni recta ſuperficies eſt ad baſim, ut latus (BC) ad baſis radium (AC.)*

Inter latus BC, & baſis radium AC ſit media proportionalis OL. Ergo ratio BC ad AC eſt duplicata *e* rationis OL ad AC. Jam circulus radii OL *f* eſt æqualis ſuperficiei conicæ CBD. Sed hujus ratio ad coni baſim ACG eſt duplicata *g* rationis OL ad AC, ac proinde eadem cum ratione BC ad AC. Ergo etiam ratio ſuperficiei conicæ CBD eſt ad baſim ACG, ut BC ad AC. Quod erat dem.

e Defin. 10. lib. 5.
f Per 13. hujus.
g Per 2. l. 12.

Corollaria.

Fig. 27. 1 *Superficies coni recti à triangulo æquilatero circa perpendicularem KA circumacto geniti baſeos QT dupla eſt.*

Eſt enim KB latus æquale BD, adeoque duplum ſemiſſeos AB, quæ baſeos radius eſt.

Fig. 24. 2 *Superficies coni à rectangulo triangulo æquicruri EBD producta eſt ad baſim, ut in quadrato diameter ad latus.*

Ducta enim perpendiculari BA, angulus rectus B biſe-

biſecatur, adeoque ABD ſemirectus eſt; eſt autem & ADB *b* ſemirectus. Ergo DA, BA *c* æquales ſunt, ac proinde BD eſt diameter quadrati Ak, latus verò AD. Eſt verò eadem AD ſemidiameter baſeos PT, cùm perpendicularis AB ſecet *d* bifariam ED. Ex quibus, & hac 14 patet corollarium.

b Per coroll. 11. p. 32. l. 1.
c Per 6. l. 1
d Patet ex 26. l. 1.

3 *Superficies cylindri recti (GK) eſt ad ſuperficiem coni recti (GBN,) ut cylindri latus ad dimidium latus coni.* *Fig. 24.*

Nam ſuperficies coni GBN eſt ad baſim MI, ut latus BN ad *e* ſemidiametrum baſis QN; hoc eſt, ut dimidium lateris BN ad quartam partem diametri GN. Eſt autem baſis MI ad ſuperficiem cylindri Gk, ut *i* quarta pars diametri ad Nk cylindri latus. Ex æquo igitur ſuperficies conica GBN eſt ad ſuperficiem cylindricam Gk, ut dimidium latus coni ad cylindri latus Nk. Quod erat demonſtr.

e Per 14. hujus.
i Per 12. hujus.

Lemma ad ſequen.

IN *triangulo NPV ducta ſit QD parallela ad NV. Dico rectangulum ſub PN, & NV æquari rectangulo ſub QP, QD unà cum rectangulo ſub NQ & duabus ſimul ſumptis NV, QD.* *Fig. 10.*

Duc lateri NP perpendicularem NA æqualem NV, completoque NO rectangulo, ducatur diameter PA. Tum ex Q parallela QE ad NA ſecet PA in B. Per B ducatur CF parallela ad NP. Quoniam AN eſt par NV, patet etiam *a* QB eſſe parem QD. Igitur rectangulum ON eſt rectang. PNV, & FQ eſt PQD. Reſtat,

a Ex coroll. 1. p. 4. l. 6. & ex 11. l. 5.

ut probemus rectangula O B, E C, B N æquari rectangulo ſub N Q, & duabus N A, Q B, hoc eſt ſub N Q, & duabus N V, Q D. Id verò eſt manifeſtum: rectangulum enim ſub N Q, & N A,

b Per 1. *l*. 2. Q B æquantur *b* his tribus rectangulis ſub N Q, & C A (hoc eſt ſpatio E C), ſub N Q, & N C (hoc eſt ſpatio B N), ſub N Q, & Q B (hoc eſt rurſùm ſpatio B N), ac proinde ſpatio O B, quod

c Per 43. *l*. 1. ipſi B N *c* æquale eſt. Liquet ergo propoſitum.

PROPOSITIO. XV.

Fig. 11. & 12. *Si conus rectus ſectus ſit plano Q S R baſi N Z O parallelo, dico circulum G H M, cujus radius G H eſt medius inter partem lateris N Q, & circulorum Q S R, N Z O radios; Q D, N V ſimul ſumptos, æqualem eſſe ſuperficiei conicæ inter parallelos circulos Q S R, N Z O interceptę.*

Inter P N, & N V media ſit G F. Item inter P Q, & Q D ſit media G k, deſcribanturque

b Per 13. *hujus*. circuli G F L, G k T. Erit hic *b* æqualis ſuperficiei conicæ Q P R, ille ſuperficiei *c* N P O. Re-

c Per eād. *d Per lem.* ctangulum P N V æquatur *d* rectangulo P Q D

e Per conſtr. unà cum rectangulo ſub N Q, & N V, Q D ſimul ſumptis. Sed quia *e* G F media eſt proportio-

f Per 17. *l*.6. nalis inter P N, N V, rectang. P N V eſt æquale *f* quadrato G F, & quia G k eſt *i* media inter

i Per conſt. *l Per* 17. *l*.6. P Q, Q D, rectang. *l* P Q D æquatur quadrato G K: & quia G H media *m* eſt inter Q N, &

m Per hyp. Q D, N V ſimul ſumptas, rectangulum ſub Q N,

n Per 17. *l*.6. & Q D, N V ſimul ſumptis æquale eſt *n* quadrato G H. Ergo quad. G F par quoque eſt quadratis G H, G k. Ergo cùm circuli ſint inter ſe

o Per 2. *l*.12. ut *o* quadrata radiorum, erit quoque circulus

G F L

G F L æqualis duobus circulis G k T, & G H M. Atqui circulus G F L eſt æqualis *p* ſuperficiei conicæ N P O. Ergo etiam ſuperficies conica N P O, æquatur duobus circulis G k T, & G H M. Atqui ſuperficiei N P O pars una Q P R *r* æqualis eſt circulo G k T. Ergo reliqua inter parallelos circulos Z Z, S S comprehenſa æquatur circulo G H M. Quod erat demonſtrandum.

p Per 13. hujus.
r Per eād.

Lemma ad ſequen.

R*Ectæ* (*B H, C G,*) *quæ in circulo æquales arcus* (*B C, H G*) *intercipiunt, ſunt parallelæ.* Fig. 13.

Ducatur enim C H. Quoniam arcus B C, H G per hyp. ſunt æquales, etiam *a* anguli B H C, G C H alterni æquales erunt. Ergo *b* B H, & C G ſunt parallelæ. Quod erat demonſtr.

a Per 29. l. 3.
b Per 28. l. 1.

PROPOSITIO XVI.

I*Nſcribatur circulo figura regularis parilatera, & æquilatera, ducaturque* EB *ab extremitate diametri ad* B *terminum lateris diametro proximi; angulos verò æqualiter diſtantes ab* A, *jungant rectæ* BH, CG, DF. Fig. 13.

Dico, rectangulum, quod diametro AE, *& ſubtenſa* EB *continetur, æquari rectangulo, quod fit ex latere uno figuræ inſcriptæ* (AB, *vel* BC *&c.*) *& ex omnibus jungentibus* BH, CG, DF *ſimul ſumptis.*

Duc C H, D G: quoniam B H, C G, D F intercipiunt arcus *a* æquales B C, H G, C D, G F; erunt *b* parallelæ. Pari argumento parallelę ſunt

a Per 26. l. 3.
b Per lem. præced.

B A,CH,DG,EF. Omnia igitur triangula *c* BAk, kHL, LCM, MGN, NDO, OFE æquiangula ſunt. Ergo *d* ut B k ad k A, ſic H k ad k L; & ut H k ad k L, ſic C M ad M L; & ut C M ad M L, ſic G M ad M N; & ut G M ad MN, ſic D O ad O N; & ut D O ad O N, ſic F O ad O E. Ergo *e* ut una antecedentium B k ad unam conſequentium k A, ſic omnes antecedentes B k, k H, C M, M G, D O, O F (hoc eſt omnes jungentes B H, C G, D F) ſunt ad omnes conſequentes A k, k L, L M, M N, N O, O E, hoc eſt ad diametrum A E. Sed ut B k ad *i* A k. ſic E B ad B A. Ergo ut omnes ſimul B H, C G, D F ad A E, ſic E B eſt ad B A. Ergo rectangulum ſub omnibus jungentibus B H, C G, D F, & ſub B A æquatur ractangulo ſub A E, & EB. Quod erat demon.

c Per 27. & 25. l. 1.
d Per 4. l. 6
e Per 12. l. 5.
i Per 8. l. 6
l Per 16. l. 6.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 14.

SEgmento circuli D A F, cujus baſis D F perpendicularis ſit diametro A O E, inſcribatur figura ęquilatera, & parilatera, ducaturque, ut in præcedenti recta E B.

Dico, rectangulum ſub E B, & parte diametri A O, quæ ſegmenti axis eſt, comprehenſum æquari rectangulo ſub latere uno figuræ inſcriptæ, & omnibus jungentibus B H, C G vnà cum D O dimidio baſis D F ſimul ſumptis comprehenſo.

De-

Demonſtratio eadem, quæ præcedentis.

Lemma 1. ad ſequen.

INſcripta ſit ſphæræ maximo circulo figura regularis, cujus latera quatenarius metiatur, circa axem AE conſiſtens, quo manente circulus cum figura circumagatur. Fig 13.

Dico ſphæræ inſcriptum iri corpus conicis rectis ſuperficiebus contentum.

Quòd BA, HA, item DE, FE deſcribant integras conorum rectorum ſuperficies manifeſtum o eſt. Deinde, quia lineæ CB, GH; & GF, CD concurrunt productæ in eodem utrimque puncto diametri AE ſimiliter pertractæ, quæ jungentes ſecat normaliter, etiam liquet has deſcribere partes ſuperficierum rectarum conicarum interceptas inter parallelos circulos, quos in ſphærica ſuperficie deſcribunt vertices angulorum B, C, D. *o Vide defin. 2. l. 12*

Lemma 2.

SEgmenti ſphæræ, cujus axis AO, ſectio maxima eſto DEF. Huic inſcripta ſit figura æquilatera dempta baſi, quæ circa axem AO in orbem convertatur. Fig. 14.

Dico ſegmento ſphærico inſcriptum iri corpus conicis ſuperficiebus contentum.

Probatur, ut lemma præced.

PROPOSITIO XVIII.

POnantur eadem, quæ in primo lemmate. Et ducatur recta EB ab extremitate diametri ad termi- Fig. 13.

 num

num lateris diametro proximi.

Dico omnibus ſuperficiebus conicis ſphæræ inſcriptis æqualem eſſe circulum, cujus radius (I) *poteſt* a *rectangulum AEB comprehenſum videlicet ſub diametro AE, & ſubtenſa EB.*

a Potentia rectæ eſt quadratum ejus.

b Per 17. l.6.

Hoc eſt. *b* cujus radius (I) eſt medius proportionalis inter AE, & EB.

c Per 1. l.2.

Quoniam rectæ BH, CG, DF æquantur rectis BK, CM, DO bis ſumptis, erit *c* rectangulum ſub latere uno figuræ inſcriptæ maximo circulo (videlicet ſub AB, vel BC, vel CD, vel DE) & ſub omnibus ſimul jungentibus BH, CG, DF æquale rectangulo ſub AB, & BK, ſub BC, & compoſita ex BK, & GM, ſub CD, & compoſita ex CM, & DO, ſub DE, & DO; ſic enim rectæ BK, CM, DO ſingulæ fuerunt bis acceptæ. Atqui rectangulum ſub AB, & omnibus jungentibus BH, CG, DF ſimul ſumptis æquatur *d* rectangulo AEB, hoc eſt *e* quadrato I. Ergo quadratum I æquale eſt rectangulis ſub AB, & BK; ſub BC, & compoſita ex Bk CM, ſub CD, & compoſita ex CM, DO; ſub DE, & DO. Sint jam inter AB, & BK media proportionalis P: inter BC, & compoſitam ex BK, CM media Q: inter CD, & compoſitam ex CM, DO media R: inter DE, & DO media S. Erunt igitur quadrata P, Q, R, S æqualia *f* rectangulis ſupradictis. Quare cùm quadratum I jam oſtenderim iiſdem æquari rectangulis, etiam quadratis P, Q, R, S æquale erit. Cùm igitur circuli ſint inter ſe *g* ut quadrata radiorum, etiam circulus radio I deſcriptus omnibus ſimul circulis, quorum radii P, Q, R, S, æqualis *i* erit. Atqui circuli radiorum P, & S æquantur *l* ſuperficiebus conicis, quas pro-

d Per 16. hujus.

e Per hyp.

f Per 17. l.6.

g Per 2. l.12.

i Patet ex 22. l.6. & 24. l.5.

l Per 13. hujus.

produxerunt latera AB, ED; ſiquidem P eſt media proportionalis inter AB coni latus, & Bk radium baſeos, S verò media eſt inter ED, & DO; & circulus radii Q eſt æqualis ſegmento *a* ſuperficiei conicæ, quæ intercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum CG, BH, quia Q media eſt inter BC, & compoſitam ex Bk, CM; & ob eandem cauſam circulus radii R æquatur ſegmento ſuperficiei conicæ inter paralleos circulos diametrorum CG, DF interceptæ Ergo circulus radio I deſcriptus æquatur omnibus ſimul conicis ſuperficiebus ſphæræ inſcriptis. Quod erat dem. *a Per 15. hujus.*

PROPOSITIO XIX.

Ponantur eadem, quæ in 2. lemmate, & ducatur recta EB ab extremitate diametri AE ad termnum lateris AB diametro proximi. *Fig. 14.*

Dco omnibus ſuperficiebus conicis ſegmento ſphæico DAF inſcriptis æqualem eſſe circulum, cuju radius eſt medius proportionalis inter EB, & ſgmenti axem AO.

Dmonſtratio planè eadem, quæ præcedentis; ſed po P. 16. citetur P. 17.

PROPOSITIO XX.

Upeficies conicę ſphæræ inſcriptæ in ſphæræ ſuperſiem deſinunt. *Fig. 15.*

Data ſit ſuperficies quantumvis parva X: manifeſtum eſt inta ſphæricam ſuperficiem ACEG dari

aliam poſſe concentricam, quæ ab hac deficiat quantitate minori, quàm ſit X. Ambarum plano ſectarum per centrum maximi circuli ſint ACEG, DPLM. Ducatur diameter ADE, & in D tangat NQ. Si arcus AE biſecetur in C, & reſiduum biſecetur rurſus, & ſic deinceps, relinquetur *a* tandem arcus AB minor arcu AN; huic ſi ſubtendatur recta AB, manifeſtum eſt, eam non pertingere ad peripheriam PDML, eſſeque latus figuræ æquilateræ, & parilateræ circulo CAGE inſcriptæ, cujus nullum latus pertingat ad peripheriam PDML. Quare ſi circa diametrum AE in orbem aganur omnia, patet, ſuperficiei ſphæricæ exteriori inſcribendas eſſe conicas ſuperficies, quæ indudant ſuperficiem ſphæricam alteri concentricam, ac proinde illa ſint *b* majores. Quoniam igitur ſphærica ſuperficies DPLM, deficit à ſuperficie ſphærica ACEG quantitate minori, quàm ſit data X; multò magis ſuperficies conicæ ab eadem ſphærica ACEG deficient quantitate minori, quàm ſit data X, ac proinde *c* in ACEG ſuperficiem deſinent. Quod erat demonſtr.

a Patet ex lem. 2. ſch. poſt 11. l. 6.

b Per axio. 3. hujus.

c Deſin. 6. lib. 12.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 17.

Conicę ſuperficies ſegmento ſphærico DAF inſcriptę in ipſam ſegmenti ſphæricæ ſuperficiem deſinunt.

Demonſtrabitur eodem ferè ratiocinio, quo præcedens.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Demonſtratum eſt propoſ. 18, *circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter diametrum* A E, *&* *rectam* E B, *quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminum lateris* A B *diametro proximi, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis ſphæræ inſcriptis.* *Fig.*16.

Dico hunc circulum deſinere o *tandem in circulum, cujus radius eſt* A E *ſphæræ diameter.* *o Vide defin.*6.*l.*12

Nam ſi plura ſemper, ac plura in infinitum latera circulo maximo inſcribantur, (quæ deinde circa A E in orbem acta conicas producunt ſuperficies) patet latus A B fieri tandem quavis data recta minus, ac proinde ſubtenſam E B ad diametrum A E accedere ad intervallum etiam quovis dato minùs, unde fit, ut differentia ipſarum A E, B E etiam fiat quavis data minor. Ergo multò magis media proportionalis inter A E, B E, quæ ſemper major eſt, quàm B E, differet ab A E tandem defectu minori quocunque dato. Ergo etiam circulus, cujus ſemediameter eſt media inter A E, & B E, à circulo, cujus radius eſt A E, tandem differet defectu minori quocunque dato, hoc eſt in *i* ipſum deſinet. Quod erat demonſtr. *i Defin.*6. *lib.*12.

Hæc per ſe ſatis clara non eſt neceſſe operoſiùs demonſtrare.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 17. *DEmonſtratum eſt propoſ. 19, circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter E B, & A O ſegmenti axem, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis portioni ſphæricæ D A F inſcriptis.*

Dico hunc circulum deſinere in circulum, cujus radius eſt recta A D à ſegmenti vertice ducta ad peripheriam circuli D Q F N, qui baſis eſt ſegmenti.

Nam, quia jam ex præced. demonſt. liquet E B deſinere tandem in A E, patebit quoque, mediam proportionalem inter E B, & A O deſinere tandem in mediam proportionalem inter A E, & A O, n hoc eſt in ipſam A D. Manifeſtum eſt igitur, & circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter E B, & A O, etiam deſinere in circulum radii A D. Quod erat demonſtrandum.

n Per coroll. 2. p. 8. lib. 6.

Lemma ad ſequen.

SI diameter diametri dupla eſt, circulus circuli quadruplus erit.

Patet ex propoſ. 2. lib. 12. & defin. 10. lib. 5.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 16. *CUjuſcunque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli ejuſdem ſphæræ.*

HOc nobiliſſimum Archimedis theorema ex jam præmiſſis expeditè demonſtrabimus hunc in modum.

Circu-

Circulo ſphæræ maximo circa diametrum AE intelligatur inſcripta eſſe figura ordinata, cujus latera quaternarius metiatur, quæ circa AE in orbem ducta producat conicas ſuperficies ſuperficiei ſphæricæ inſcriptas, ducaturque EB. Demonſtratum jam ſuprà *a* eſt, omnes conicas ſuperficies ſphæræ inſcriptas æquales eſſe circulo, cujus radius poteſt rectangulum AEB, hoc eſt cujus radius eſt medius proportionalis inter AE, & EB. Atque hoc ſemper eveniet inſcriptionibus in infinitum continuatis. Quare cùm inſcriptæ conicæ ſuperficies, *b* tandem deſinant in ſphæricam ſuperficiem, circulus verò, cujus radius eſt medius inter AE, & EB, deſinat *c* in circulum, cujus radius AE, ipſa quoque ſphærica ſuperficies *d* æqualis erit circulo radii AE, hoc eſt *e* quadruplo maximi circuli ACEG. Quod erat demonſtrandum.

a Per 18. hujus. *b Per 20. hujus.* *c Per 22. hujus.* *d Per 2. hujus.* *e Per lem. præc.*

Viam, qua in theoremate nobiliſſimo demonſtrando hactenùs uſi ſumus, Archimedæa multò breviorem, & clariorem eſſe ſciet, qui Archimedem legerit.

Corollarium.

EX hoc præclaro, atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras conſecutus eſt, exhibetur circulus æqualis ſuperficiei ſphæricæ, is nimirùm, cujus ſemidiameter eſt ſphæræ diameter, ſive cujus diameter dupla eſt diametri ſphæræ.

Scholium.

EXpedita jam erit dimenſio ſuperficiei ſphæricæ principis inter omnes curvas. Duplex eſt modus.

1. *Men-*

1. Menſuretur circulus ſphæræ maximus (ut traditur in ſcholio poſt P. 6. hujus.) Et multiplicetur per 4. Ut ſi maximus orbis terræ circulus inventus ſit continere quadrata milliaria unius horæ, ſive Belgica 5, 940, 000. hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria Belgica 23, 760, 000. quæ in ſuperficie orbis terræ continentur.

2. Diameter ſphæræ multiplicata per circumferentiam maximi circuli exhibet ſphæræ ſuperficiem. Ut ſi terræ diametro dentur milliaria unius horę $2750\frac{14}{17}$*. atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliariorum 8640. hi duo numeri omiſſa fractione multiplicati per invicem dabunt rursùm quadrata milliaria unius horæ 23, 760, 000. totam orbis terræ ſuperficiem conſtituentia.*

Demonſtratio patet ex primo coroll. p. 5. hujus; rectangulum enim ſub diametro ſphærę, & maximi circuli circumferentia per dictum coroll. eſt quadruplum maximi circuli.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 17. *Cujuſcunquè portionis ſphæricæ (DAF) ſuperficies ęqualis eſt circulo, cujus radius eſt recta (AD) à vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli (DQFN), qui portionis eſt baſis.*

Portionis maximæ ſectioni inſcripta cogitetur circa axem AO figura æquilatera, & parilatera baſi dempta, quæ circa AO in orbem acta
In 18. & portioni inſcribet conicas ſuperficies. Ducatur
19. hujus. quoque recta EB, ut ſuprà. Omnes conicæ ſuper-

ſuperficies ſegmento ſphærico jam inſcriptæ æquantur *a* circulo cujus radius eſt medius proportionalis inter EB, & ſegmenti axem AO. *a Per 19. hujus.* Atque hoc multiplicatis in infinitum inſcriptionibus ſemper continget. Quare cùm & conicæ ſuperficies ſegmento inſcriptæ deſinant *b* in ſphæricam ſegmenti ſuperficiem, & circulus, cujus radius inter EB, & AO medius eſt, deſinat *c* in circulum radii AD, etiam *d* ſphærica portionis ſuperficies DAF circulo radii AD æqualis erit. Quod erat demonſtr. *b Per 21. hujus. c Per 23. hujus. d Per 2. hujus.*

Hoc alterum eſt ex Archimedis inventis nobilioribus, quod perinde ac præcedens, via multò, quàm ipſe, breviori, ac clariori jam demonſtravimus.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 18.

CYlindri recti ſphærę circumſcripti (HPSV) ſuperficies ęqualis eſt ſuperficiei ſphæræ.

Et ſi cylindrus, ac ſphærę ſecentur planis ad axem (BG) rectis, erunt ſingula ſuperficiei cylindricę ſegmenta ſegmentis ſingulis ſuperficiei ſphæricæ ęqualia.

1. Pars. Quoniam cylindri latus HP æquale eſt *o* PS diametro baſis, erit cylindrica ſuperficies HS, quadrupla *a* baſeos, hoc eſt maximi circuli ſphæræ cylindro inſcriptæ, cujus cùm etiam *b* quadrupla ſit ſphæræ ſuperficies, erit hæc æqualis cylindricæ. Quod erat dem. *o Per hyp. a Per cor. p.12. hujus. b Per 24. hujus.*

2. Pars. Ducantur rectæ BO, GO. Quoniam angulus BOG *i* rectus eſt in ſemicirculo, ab eoque cadit OC perpendicularis ad BG, erit *c* BO media proportionalis inter GB, & BC, hoc eſt inter IT, & HI. Ergo circulus radii BO *d* æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ HT. Sed idem circulus *i Per 31. l. 3. c Per cor. 2. p. 8. l. 6. d Per 11. hujus.*

e Per præc. culus æqualis eſt *e* etiam ſegmento ſuperficiei ſphæricæ OBk. Æquales igitur ſunt ſuperficies cylindrica HT, & ſphærica OBk.

Deinde, quia eodem modo oſtenditur cylindrica HX æquari ſphæricæ QBR, etiam reliqua cylindrica IX reliquæ ſphæricæ QOkR inter duos parallelos circulos interceptæ æqualis erit.

Ex his patet de ſegmentis omnibus.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 18. *SEgmenta ſuperficiei ſphæricæ parallelis circulis diviſæ eam inter ſe proportionem habent, quam ſegmenta diametri (BC, CD, DA, AE, EF, FG) ad circulos parallelos rectæ.*

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim ſphæricæ ſuperficiei ſegmenta OBk, QOkR, MQRN, *a Per præc.* &c. *a* æqualia cylindricis HT, IX, LN &c. Atque hæc eandem inter ſe rationem habent, *b Per 13. l. 12.* *b* quam axeos ſegmenta BC, CD, DA &c. Ergo & illa. Quod erat dem.

Scholium.

EX hac innoteſcit proportio zonarum, & climatum inter ſe. Sunt enim ad invicem, ut ſegmenta axis, quæ nota fiunt ex tabula ſinuum.

Ex eadem habetur dimenſio ſegmentorum ſuperficiei ſphæricæ. Nam, quia & tota ſphæræ ſuperficies nota eſt ex ſcholio prop. 24, & ſegmentorum proportio, utpote eadem, quæ partium axis, etiam datur, liquet ſegmenta ſingula innoteſcere.

Ceterùm

Cæterùm & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua omnia, quæ ſequuntur, omninò ſingularia, atque admiranda ſunt, planèque digna, ad quæ intelligenda Geometriæ ſtudioſi ardenti ſtudio incumbant.

Lemma ad ſequent.

SI *ſpæram tangat planum (QN in O) recta (AO) ex centro ad contactum ducta eſt plano tangenti perpendicularis.* Fig. 19.

Secentur planum tangens QN, & ſphæra per tactum O duobus planis, quæ in ſphæra quidem producant circulos OG, OD, in plano autem QN rectas CO, IO, quæ circulos contingent in O. Igitur per 18. l. 3. AO perpendicularis eſt ad utramque IO, CO, ac proinde per 4. lib. 11. recta plano QN. Quod erat dem.

PROPOSITIO XXVIII.

O*Mnis ſphæra æqualis eſt cono (ZO) cujus altitudo (KO) par eſt radio ſphæræ, baſis verò (Z) ſuperficiei ſphæræ æqualis.* Fig. 20. 21 & 22.

Intelligatur ſphæræ circumſcriptum eſſe corpus aliquod poliedrum, cujus ſolidi anguli novis planis ſphæram tangentibus abſcindantur. Quo facto orietur aliud corpus poliedrum ſphæram continens minus priore, & pluribus conſtans angulis, & ſuperficiem habens ex pluribus, ac minoribus planis tangentibus compoſitam. Si poliedri hujuſmodi anguli novis planis tangentibus iterùm abſcindantur, & tertii poliedri inde nati ſimiliter, atque ita in infinitum: fiet tandem, ut &

polie-

poliedrum excedat ſphæram ſolido minori quocunque dato, & ſuperficies ejus ex planis tangentibus (quæ, ut dixi, ſine termino & minora, & plura erunt) compoſita ſphçricam ſuperficiem excedat quoque plano minori dato quocunque. Quod utrumque, licet demonſtrari poſſet, tamen, quia per ſe ſatis clarum, poſtuletur ſtudio brevitatis. His ita conſtitutis quæſitum ita concludemus.

Poliedrum jam expoſitum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis eſt centrum ſphçræ, baſes verò ſunt plana tangentia, quæ poliedri ſuperficiem conſtituunt. Et quia rectæ ex centro A ad ſingulorum planorum contactus
a Per lem. præc. ductæ ad plana *a* ſingula perpendiculares ſunt, erunt omnium pyramidum, quibus conſtat poliedrum, æqualis altitudo, ipſe nimirùm AB radius ſphçræ. Si jam igitur planum X ponatur æquale ſuperficiei ipſius poliedri, ſuperque eo erecta ſit pyramis ad altitudinem MN etiam çqualem
b Per 6. lib. 12. ſphæræ radio AB, manifeſtum eſt *b* omnes pyramides ſupradictas, hoc eſt totum poliedrum çquari pyramidi XN. Ad eundem modum reliqua omnia poliedra ſphçram includentia, quç ex truncatione perpetua ſolidorum angulorum, alia atque alia naſcentur in infinitum, ſemper çqualia erunt pyramidibus per XN reprçſentatis, quarum altitudines MN ſunt radius ſphçrç, baſes verò X çquales ſuperficiebus poliedrorum ſphçram ambientibus. Quare cùm tandem, & poliedra (ut dixi ſuprà) in ſphçram, & pyramides XN (ut mox oſtendam) in conum ZO deſinant, etiam
c Per 1. hujus. *c* ſphçra cono çqualis erit. Quod erat dem.
d Defin. 6. lib. 12. Quòd autem pyramides XN *d* deſinant in conum ſic oſtendo. Poliedrorum ſuperficies deſinunt in

ſphç-

ſphærę ſuperficiem, ut poſtulatum ſuprà. Atqui baſes X pyramidum X N ſemper æquales ponuntur ſuperficiebus poliedrorum, & Z baſis coni Z O per hyp. æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ, ergo etiam baſes X deſinent in baſim Z; ac proinde, cùm pyramides X N ſint ad conum ex hyp. æquè altum, ut *e* baſis X ad baſim Z, etiam pyramides in conum deſinent. *e Per coroll. p.11. l.12.*

Demonſtratio jam allata hujus propoſitionis, & ſequentis penitus diverſa eſt ab ea, qua uſus eſt Archimedes, quæ quidem valdè ſubtilis, & ingenioſa eſt, ſed prolixa, & ardua, ad quam videlicet adhibentur duo manifeſta, & propoſitiones undecim præter alias non paucas, à quibus illæ dependent. Ipſum verò theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: Omnis ſphæra quadrupla eſt coni baſim habentis æqualem maximo circulo ſphęræ, altitudinem verò radium.

Scholium.

Ex hoc prænobili theoremate figuræ inter corporeas nobiliſſimæ elicitur dimenſio. Nam ſi diametri ſexta pars, ſive tertia ſemidiametri multiplicetur per ſphæræ ſuperficiem jam notam per ſcholium prop. 23, proveniet ſphæræ ſoliditas.

Inventa ſit ſphæra terreſtris ſuperficies continere quadrata unius horæ milliara 23,760,000, & ſemidiameter eſto milliarium horariorum 1375, cujus tertia pars eſt $458\frac{1}{3}$*. Multiplica 458 omiſſa fractione per 23,760,000, provenient 10,882,080,000 cubica unius horæ milliaria pro ſoliditate orbis terræ.*

Cum enim ſphæra ſit æqualis a cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis verò ſuperficies ſphæræ; coni *a Per hāc 28.*

S *autem*

b Per ſchol. p.6.hujus. *autem ſoliditas* b *producatur ex parte tertia altitudinis (hoc eſt radii ſphæræ) ducta in baſim , (hoc eſt in ſphæræ ſuperficiem) etiam ſphæræ ſoliditas obtinebitur ex tertia parte radii ducta in ſuperficiem .*

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 23. *Omnis ſector ſphæræ æqualis eſt cono , cujus altitudo eſt radius ſphæræ ; baſis verò ſectoris ſphærica ſuperficies .*

ESto primùm ſector (AECG) hemiſphærio minor . Intelligatur ſectori circumſcriptum eſſe poliedrum corpus rectilineum . Si cætera ratiocinatio omnis ad eundem modum inſtituatur , ut in præcedenti, eodem modo concludetur quęſitum . Id ſolùm oportebit oſtendere, ex quo diſcurſus totus dependet, ſuperficiem poliedri ex planis ſphæricam ſuperficiem ECG undequaque tangentibus compoſitam eſſe majorem ſuperficie ECG, quod ita fiet . Cogitetur ſuperficiei ECG apponi alia æqualis, & ſimilis planis tangentibus eodem prorsùs modo cincta, quo prior.

c Per axio. 3. hujus. Erit jam tota *c* ſuperficies ex planis compoſita major tota ſphærica . Ergo etiam dimidia ex planis compoſita dimidia ſphærica ECG major erit.

Eſto deinde ſector(AEBG) major hemiſphæ-

d Per præc. rio, Uterque ſector ſimul ſumptus æqualis *d* eſt cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis autem tota ſuperficies, hoc eſt *e* duobus conis, quo-

e Patet ex 11.l.12. rum altitudo eadem, baſes verò pares ſuperficiei ſphæricæ ſegmentis ECG, EBG . Atqui ſectorum unus AECG hemiſphęrio minor per 1.partē æquatur cono, cujus altitudo eſt radius, baſis verò ſuper-

perficies ECG. Ergo alter AEBG æquatur cono reliquo, cujus altitudo eſt radius, baſis verò ſuperficies reliqua EBG. Quod erat dem.

Corollarium.

CUm ſuperficies ECG ſit æqualis *o* circulo radii CG, & ſuperficies EBG æqualis circulo radii BG, erunt ſectores AECG, & AEBG æquales conis, quorum altitudo eſt radius ſphæræ, baſes verò circuli radiorum CG, & BG. *o Per 25. hujus.*

Scholium.

Ex his habetur dimenſio & ſectorum, & ſegmentorum ſphæræ, ſectorum quidem, ſi multiplicetur p *tertia pars radii per ſphæricam ſectorum ſuperficiem, jam notam ex ſcholio prop. 27. ſive per circulum radii CG, vel BG, ſegmentorum verò, ſi menſuretur conus EAG, & à ſectore, ſi minor eſt hemiſphærio, auferatur, ſi major, eidem adjiciatur.* *Fig. 23.* *p Patet ex ſchol. p. 6. hujus.*

Segmentum (MQRN), quod inter duos circulos ſive parallelos, ſive non parallelos interjicitur menſurabis, ſi ſegmenta QBR, & MBN jam nota auferantur ab invicem. *Fig. 18.*

PROPOSITIO XXX.

HEmiſphærium (EOBD) coni (EBD) eandem ſecum baſim, & altitudinem habentis duplum eſt. *Fgi 42.*

Conus, cujus baſis eſt ſuperficies hemiſphærica

EOBD, altitudo autem radius AB, eſt ad conum EBD, *a* ut baſis ad baſim, hoc eſt ut ſuperficies hemiſphærica EOBD ad maximum circulum PT. Ergo cum ſuperficies hemiſphærica EOBD dupla *b* ſit maximi circuli, etiam conus pro baſi habens ſuperficiem EOBD, pro altitudine radium AB duplus eſt coni EBD. At hemiſphærium æquatur *c* cono habenti pro altitudine radium, pro baſi ſuperficiem hemiſphæricam EOBD. Ergo etiam hemiſphærium coni EBD duplum eſt. Quod erat demonſt.

a Per 11. lib. 12.

b Per 24. hujus.

c Per 28. hujus.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 25.

Sphæra ſit diviſa in duo ſegmenta ILBG, ISKG plano IQGT per centrum A non tranſeunte, diameter autem plano ſecanti recta ſit BOK.

Ut altitudo OB ſegmenti ILBG eſt ad radium ſphæræ AB, ita OK altitudo ſegmenti alterius fiat ad aliam KN.

Pari modo, ut OK altitudo ſegmenti ISKG eſt ad radium AK, ſeu AB, ita altitudo OB ſegmenti alterius fiat ad aliam BD.

Dico 1. Coni IN2G, & IDG, quorum altitudines ſunt ON, OD, baſis vero communis IQGT, ſegmentis ſphæricis ſunt æquales.

2 Segmentorum eadem eſt proportio, quæ rectarum DO, NO.

3 Segmentum ISKG eſt ad maximum ſibi inſcriptum conum IKG, ut NO ad KO, & ſegmentum ILBG eſt ad ſibi inſcriptum conum maximum IBG, ut DO ad BO.

Pars

Pars 1. Sphæra, & coni ſecentur plano per diametrum B K, producentur in ſphæra circulus maximus B L K G; in conis verò triangula B I G, I K G; & quia B O K diameter *a* recta eſt circulo Q T, erit angulus I O B *b* rectus. Angulus quoque B I K *c* in ſemicirculo rectus eſt. Quoniam igitur in triangulo B I K ab angulo recto ducta eſt I O perpendicularis in baſim B K, erit B I ad I O, ut *d* B K ad K I. Ergo ratio duplicata B I ad I O æqualis eſt rationi duplicatæ B K ad K I; hoc eſt (quia B K, K I, K O *f* ſunt tres proportionales) æqualis rationi B K, K O.

a Per hyp.
b per defin. 3. l. 11.
c per 31. l. 3.
d Per 8. l. 6.
f Per corol. 2. p. 8. l. 6.

Deinde, quia eſt ut O K ad radium A B, ita *o* O B ad B D; erit quoque invertendo D B ad B O, ut A B ad O K; & permut. D B ad B A, ut B O ad O K; & compon. D A ad B A, ut B K ad O K. Quoniam igitur jam oſtendi rationem B K ad O K duplicatam eſſe rationis B I ad I O, ac proinde æqualem *p* rationi circulorum radiis B I, I O deſcriptorum, erit quoque D A ad B A, ut circulus radii B I ad circulum radii I O. Igitur conus ſub altitudine D A, & baſi circulo radii I O, hoc eſt circulo Q T, ęqualis eſt *g* cono ſub altitudine B A, & baſi circlo radii B I; hoc eſt *i* ſectori ſphærico A I B G. Quare ſi tam ſectori A I B G, quàm cono ſub D A, & circulo Q T addatur idem conus I A G, tota erunt æqualia; videlicet ſegmentum ſphæricum I L B G æquabitur duobus conis, quorum unus eſt, qui ſit ſub baſi Q T, & altitudine D A, alter I A G ſub eadem baſi Q T, & altitudine A O. Sed hi duo coni *k* conficiunt conum I D G. Ergo ſegmentum I L B G cono I D G æquale erit. Quod erat demonſtr.

o Per hyp.
p Per 2. l. 12.
g Per 15. lib. 12.
i per corol. p. 29. huius.
k Patet ex 14. l. 12.

Eodem diſcurſu erit ſegmentum I S K G æquale cono I N G, eo ſolùm mutato, ut conus I A G, qui priùs addebatur, jam auferatur.

n Per 14. l.12. *Pars* 2. Patet ex prima. Nam coni IDG, & ING ſunt inter ſe *n* ut DO, & NO. Ergo & ſegmenta ILBG, ISkG conis illis æqualia ſunt inter ſe, ut rectæ DO, NO.

q Per eād. *Pars* 3. Patet ſimiliter ex prima. Nam conus IDG eſt ad conum IBG, *q* ut DO ad BO. Ergo, & ſegmentum ILBG, cono IDG æquale eſt ad conum IBG, ut DO, ad BO.

Scholium.

Ex prima parte hujus theorematis habetur alia, eaque facillima ſegmentorum ſphæricorum dimenſio, ſi nimirùm coni IDG, ING menſurentur, quod fiet ſi ſ tertię partes rectarum DO, NO ducantur in circulum QT.

ſ Vide ſchol. poſt 6. hujus.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 24. *Cylindrus rectus (GK) ſphęrę, cui circumſcribitur & ſoliditate, & ſuperficie tota ſeſquialter eſt.*

Communis ſphæræ, ac cylindri axis eſto BQ, conus verò maximus hemiſphærio EOBD inſcriptus ſit EBD. Quia cylindrus Ek (ſemiſſis totius Gk) triplus eſt *a* coni EBD; hemiſphærium verò *b* ejuſdem coni duplum, patet, cylindrum Ek eſſe ad hemiſphærium, ut 3. ad 2. Ergo etiam totus cylindrus Gk eſt ad totam ſphæram QEBD, ut 3. ad 2. Quod erat primum.

a Per 10. l.12. b Per 30. hujus.

Deinde quia cylindri latus kN eſt æquale baſis diametro GN, erit ejus ſuperficies abſque baſibus *c* quadrupla baſeos MI, ac proinde cum baſibus, hoc eſt tota cylindri ſuperficies erit ſecupla

c Per coroll. p. 12. hujus.

cupla baſeos MI, quæ par eſt maximo ſphæræ circulo. Atqui ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli. Ergo tota cylindri Gk ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut 6 ad 4. ſive ut 3 ad 2. Quod erat alterum.

Igitur cylindrus ſphæræ ſibi inſcriptæ ſoliditate, & tota ſuperficie ſeſquialter eſt. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Quanti hoc Theorema fecerit Archimedes argumento eſt, quòd tumulo ſuo ſphæram cylindro inſcriptam apponi voluerit. Atque idcircò fortaſsè inter alia tàm multa, & præclara inventa ſua hoc illi præ reliquis placuit, quòd & corporum, & ſuperficierum corpora ipſa continentium eadem eſſet atque una rationalis proportio. Similem affectionum identitatem, annulos inter annulorumque ſuperficies demonſtravimus l. 4. cylindricorum, & annularium prop. 13. 14. 15. ſed & ipſa in ſphæra aliud mihi hujus rei exemplum illuſtre ſeſe obtulit. Deprehendi ſiquidem, quemadmodum ſphæra ad cylindrum rectum ſe ambientem (qui neceſſariò æquilaterus erit) eſt tàm ſoliditate, quàm ſuperficie, ut 2. ad 3. ita ſphęram ad æquilaterum conum ſe ambientem & ſoliditate ſimiliter, & ſuperficie eam habere proportionem, quam 4. ad 9. Ex quo deinde illud conſequitur, ſeſquialteram proportionem ab Archimede in cylindro, & ſphæra repertam, in tribus ſolidis, ſphæra, cylindro, & cono æquilatero continuari. Utriuſque demonſtrationem, pluraque alia theoremata noſtra, quibus ſphærę natura mirabilis ampliùs innoteſcet, tredecim ſequentibus propoſitionibus comprehenſa ſubjungam.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 26. *Superficies ſphæræ dupla eſt ſuperficiei cylindri quadrati ſphæræ inſcripti.*

Quadratum maximo ſphæræ circulo inſcriptum, a quo in orbem ducto deſcribitur quadratus cylindrus, eſto AKL, ducatu que AL diameter quadrato, & ſphæræ communis. Quoniam quadratum AL par *a* eſt quadratis æqualibus Ak, kL erit duplum unius Ak. Ergo etiam circulus diametri AL duplus *b* eſt circuli, cujus diameter Ak, circuli nempe CN. Atqui ſuperficies ſphæræ quadrupla *c* eſt circuli, cujus diameter AL, is enim eſt maximus ſphæræ circulus, cum AL ſit ſphæræ diameter. Ergo ſphæræ ſuperficies octupla eſt circuli CN. Sed quia Lk, kA *d* æquales ſunt, cylindrica ſuperficies ACL quadrupla *e* eſt circuli CN. Ergo cum ſphæræ ſuperficies ejuſdem circuli octupla ſit, cylindricæ ſuperficiei dupla erit. Quod erat dem.

a Per 47. l.1.
b Patet ex 2.l.12.
c Per 24. hujus.
d Per hyp.
e Per coroll. p.12. hujus.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 26. *Sphæræ ſuperficies ad totam cylindri quadrati ſibi inſcripti ſuperficiem eam proportionem habet, quam 4 ad 3.*

Ponantur eadem, quæ demonſt præced. Quoniam cylindri latus LK, & baſis diameter AK *f* æquales ſunt, erit ſuperficies cylindrica CL *g* quadrupla baſis CN, ac proinde tota cylindri ſuperficies ad utramque baſim CN,& SL eſt, ut 6 ad 2.

f Per hyp.
g Per coroll. p.12. hujus.

6 ad 2. Atqui ſphæræ ſuperficies eſt ad utramque ſimul baſim CN, SL ut 8 ad 2, cùm in preced. oſtenſa ſit eſſe ad unam baſim, ut 8 ad 1. Ergo ſphæræ ſuperficies eſt ad cylindricam CL ſuperficem ut 8 ad 6, ſive ut 4 ad 3. Quod erat dem.

Corollarium.

TOta cylindri recti ſphæræ circumſcripti ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem cylindri æquilateri inſcripti, ut 2 ad 1. Nam circumſcripta eſt ad ſphæricam, ut 12 ad 8 per 32. hujus. Sphærica autem eſt ad inſcriptam, ut 8 ad 6 per hanc. Ergo ex æquo circumſcripta eſt ad inſcriptam, ut 12. ad 6. ſive ut 2 ad 1.

PROPOSITIO XXXV.

CUjuſcunque portionis ſphæricæ ſuperficies (ILBG) ad ſuperficiem coni maximi inſcripti eam rationem habet, quam coni latus (BG) ad baſis radium (GO.) Fig. 26. vel 25.

Quoniam portionis ILBG ſuperficies *a* equalis eſt circulo radii BG, erit proportio ejus ad circulum QT baſim nempè ſuam, & coni duplicata *b* rationis BG ad GO, hoc eſt *c* rationis ſuperficiei conicæ IBG ad baſim eandem QT. Ergo liquet, ſuperficiem ILBG eſſe ad ſuperficiem conicam IBG, ut eadem conica IBG eſt ad baſim QT. Quare cum conica IBG ſit ad baſim QT, *d* ut BG ad GO, etiam portionis ſuperficies erit ad conicam IBG ſibi inſcriptam, ut BG ad GO. Quod erat dem.

a Per 25. hujus. *b Per 2. l. 12.* *c Per 14. hujus.* *d Per 14. hujus.*

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 24. *Hemiſphærii ſuperficies* (*EOBD*) *ad coni maximi, ſive recti inſcripti ſuperficiem* (*EBD*) *eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad ſuperficiem verò coni ſimilis circumſcripti, ut latus in quadrato ad diametrum.*

1. Partis demonſtratio ex præcedenti eſt manifeſta; eſt enim portionis cujuſcunque, ac proinde & hemiſphærii ſuperficies EOBD ad conicam inſcriptam, ut BD ad DA. Eſt autem BADk quadratum, cujus diameter eſt BD, latus DA.

2. Pars. Semiſſis quadrati circulo (cujus centrum A) circumſcripti eſto EBC, qua circa axem AB circumacta gignatur conus hemiſphærio conſcriptus. Quoniam quadratum EC duplum *a* eſt quadrati EB, ſeu GI, etiam circulus diametri EC duplus *b* eſt circuli, cujus diameter GI, hoc eſt circuli HGDI. Atqui *c* ſuperficies hemiſphærii cono EBC incluſi ejuſdem circuli dupla eſt. Ergo circulus diametri EC ſuperficiei hemiſphæricæ æqualis eſt. Quare cùm ſuperficies conica EBC ſit ad *d* circulum diametri EC, baſim nempe ſuam, ut latus BE ad baſis radium EA, erit quoque ad ſuperficiem hemiſphæricam ſibi inſcriptam, ut BE ad EA, hoc eſt ut diameter in quadrato EBCF ad ſuum latus. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 6. l. 4.

a Patet ex 47. l. 1.
b Per 2. l. 12.
c Per 24. hujus.
d Per 14. hujus.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

Sphæra ad quadratum rhombum conicum ſibi circumſcriptum & ſoliditate, & ſuperficie eam proportionem habet, quam in quadrato latus ad diametrum. *Fig. eadẽ, cum Fig. 13. lib. 5.*

Maximo ſphæræ circulo HGDI circumſcriptum eſto quadratum EBCF, à quo circa axem BF in orbem acto rhombus conicus gignatur ſphæram ambiens.

Ut EB quadrati latus (inſpice Fig. 6. l. 4.) ad diametrum EC, ita fiat S ad R (inſpice Fig. 13. lib. 5.), quæ proportio per 4 terminos S, R, Q, O continuetur. Erit igitur ratio S ad O triplicata *a* rationis S ad R, hoc eſt EB ad EC; & ratio O ad R erit duplicata rationis O ad Q, ſive R ad S, hoc eſt EC ad EB, ac proinde *b* O eſt ad R, ut quadratum EC ad quadratum EB, unde O eſt dupla ipſius R. His ita conſtitutis intelligatur rhombo conico ſphæra circumſcribi EBCF. Erit igitur ſphæra HGDI ad ſphæram EBCF in *o* ratione triplicata diametri GI (ſive EB) ad diametrum EC; hoc eſt (quod jam oſtendi) erit ut S ad O. Sphæra autem EBCF eſt ad rhombum conicum ſibi inſcriptum, *c* ut 2 ad 1, hoc eſt (quod oſtendi ſuprà) ut O ad R. Igitur ex æquo ſphæra HGDI eſt ad eundem rhombum, qui ei eſt circumſcriptus, ut S eſt ad R, hoc eſt, ut in quadrato latus EB ad diametrum EC. Quod erat primum. Deinde ex ſecunda parte præcedentis patet hemiſphærii ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem coni EBC, ac proinde & totius ſphæræ ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem totius rhombi EBCF, ut latus in quadrato ad diametrum,

a Per def. 10. lib. 5.
b Per 20. l. 6.
o Per 18. lib. 12.
c Per 30. hujus.

trum. Ergo ſphæra tam ſoliditate quàm ſuperficie eſt ad rhombum quadratum E B C F, ut in quadrato latus ad diametrum. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 27. *Superficies portionis (BGKD) conum æquilaterum (BKD) capientis, dupla eſt ſuperficiei ejuſdem coni.*

a Per 35. hujus. Patet ſimiliter ex 35. Nam ſuperficies portionis BG k D eſt ad inſcriptam conicam, ut *a* Bk ad BA, ſed quia conus BkD æquilaterus ponitur, kB eſt æqualis BD, adeoque dupla BA. Ergo etiam ſuperficies BGkD dupla eſt inſcriptæ conicæ BkD. Quod erat dem.

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 27. *Sphæræ ſuperficies ad totam coni æquilateri ſibi inſcripti ſuperficiem eam proportionem habet, quàm 16 ad 9.*

Eſto Z ſphæræ centrum, & conus æquilaterus ſphæræ inſcriptus BkD, axis ſphæræ, ac cono cõmunis kZAO. Per hunc ſi ſecetur ſphæra, ac conus; producetur in ſphæra circulus maximus OBkD, in cono autem triangulum æquilaterum BkD, cujus unum latus BAD erit diameter baſeos conicæ QT. Et quia axis coni kA rectus eſt baſi QT, erit angulus BAk *d* rectus. Igitur quadratum BA æquale eſt *e* rectangulo kAO. Jam quia latus æquilateri trianguli abſcindit *f* quartam axis partem AO, erit rectangulum kAO, hoc eſt

d Per def. 3.l.11.
e Per cor. p.17.l.6.
f Per cor. 2.p.15.l.4.

qua-

quadratum B A triplum quadrati *i* A O. Quare cum quadratum radii Z O *l* qurdruplum ſit quadrati A O, erit quadratum radii Z O ad quadratum radii B A, ut 4 ad 3. Ergo etiam *m* circulus O B k D eſt ad circulum Q T ut 4 ad 3. Ergo ſunt quatuor circuli O B k D, hoc eſt *n* tota ſphæræ D G ſuperficies ad circulum Q T, ut 16 ad 3. Atqui *o* ſuperficies coni ęquilateri B k D eſt ad circulum Q T, baſim nempè ſuam, ut 2 ad 1, ac proinde coni B k D tota ſuperficies, unà cum baſi ſcilicet, eſt ad baſim, nempè circulum Q T, ut 3 ad 1, ſive ut 9 ad 2. Ergo cum oſtenderim ſphęræ ſuperficiem eſſe ad eundem circulum ut 16 ad 3, erit ſphęræ D G ſuperficies ad totam ęquilateri coni ſuperficiem, ut 16 ad 9. Quod ęrat dem.

i Per 1. l. 6.
l Per 4. l. 2. vel 20. l. 6.
m Per 2. l. 12.
n Per 24. hujus.
o Per coroll. 1. p. 14. hujus.

Aliter.

QUoniam æquilateri trianguli latus B D abſcindit *p* quartam axis partem A O, erit quoque ſphærica ſuperficies B O D *q* quarta pars, ac proinde ſuperficies B G k D tres quartę ſuperficiei totius ſphæræ. Quare ſi ſuperficies tota ſtatuatur eſſe 16, B G k D ſuperficies erit 12. Atqui ſuperficies B G k D *r* eſt dupla ſuperficiei conicæ B k D, ac proinde ad eam eſt, ut 12 ad 6. Ergo tota ſphærę ſuperficies eſt ad conicam B k D, ut 16 ad 6. Deinde, quia ſuperficies coni B k D, (utpote æquilateri) dupla *s* eſt baſeos Q T, liquet, ſuperficiem conicam B k D (nimirùm abſque baſi) eſſe ad totam coni ſuperficiem, ut 2 ad 3, hoc eſt, ut 6 ad 9. Igitur ex æquo tota ſphęrę ſuperficies eſt ad totam ęquilateri coni inſcripti ſuperficiem, ut 16 ad 9. Quod erat dem.

p Per coroll. 5. p. 15. l. 4.
q Per 27. hujus.
r Per præc.
s Per coroll. 1. p. 14. hujus.

PRO-

PROPOSITIO. XL.

Fig. 28.

Sphæræ ſuperficies ad æquilateri coni ſibi circumſcripti totam ſuperficiem eam proportionem habet, quam 4 ad 9.

Circulo ſphæræ maximo B P M circumſcriptum ſit triangulum æquilaterum D O F, à quo circa axem O A B in orbē ducto productus ſit conus æqu laterus ſphæræ circumſcriptus. Æquilatero autem triangulo D O F circumſcriptus etiam ſit circulus N D L O F; quem patet eſſe concentricum priori, & axis O A B producatur in N. Quoniam B N eſt *a* quarta pars axis O N, patet O N eſſe duplam k B. Quare cùm circulorum ratio ſit *b* duplicata rationis diametrorum, erit circulus B P M ad circulum NDLOF ut 1 ad 4. Atqui oſtenſum jam eſt in demonſtratione prima præcedenti, circulum N D L O F eſſe ad circulum Q T baſim coni æquilateri ſphæræ F L inſcripti, ut 4 ad 3. Ex *c* æquo igitur circulus B P M eſt ad circulum Q T, ut 1 ad 3. Atqui tota coni D O F ſuperficies circuli Q T *d* tripla eſt. Ergo tota coni ſuperficies circuli BPM noncupla eſt. Quare cùm ſphæræ T P ſuperficies ejuſdem circuli B P M *e* quadrupla ſit; erit tota coni æquilateri D O F ſuperficies ad ſuperficiem ſphæræ, cui circumſcripta eſt; ut 9 ad 4. Quod erat dem.

a Per cor. 5. p. 15. l. 4.
b Per 2. l. 12.
c Per 22. l. 5.
d Per cor. 1. p. 14. hujus.
e Per 24. hujus.

PRO-

PROPOSITIO XLI.

Æ Quilateri coni ſphæræ circumſcripti tota ſuperficies quadrupla eſt ſuperficiei totius coni inſcripti eidem ſphæræ. Fig. 28.

Æquilateri coni DOF circumſcripti tota ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem ut *a* 9 ad 4. & ſphæræ ſuperficies eſt ad coni inſcripti æquilateri SkT ſuperficiem, ut *b* 16 ad 9. Ergo ex *c* æqualitate perturbata circumſcripti æquilateri coni tota ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem æquilateri inſcripti, ut 16 ad 4, ſive, ut 4 ad 1. Quod erat demonſt.

a Per præ. *b Per 39. hujus.* *c Per 23. l.5.*

PROPOSITIO XLII.

S Phæra ad inſcriptum ſibi conum æquilaterum (BKC) eam rationem, habet quam 32 ad 9. Fig. 29.

Sphæra, & conus BkC ſecentur plano per axem communem kO faciente in ſphæra circulum maximum OFkI, in cono autem triangulum æquilaterum BkC. Ducto deinde plano per centrum A ad Ok recto, abſcindatur hemiſphærium FGkI, cui inſcriptus intelligatur conus maximus FkI. Quoniam trianguli ęquilateri latus BC abſcindit OP *d* quartam partem axis Ok, erit Pk ad Ak, ut 3 ad 2, hoc eſt ut 9 ad 6. Baſis verò QT eſt ad circulum OFkI, hoc eſt ad baſim ND, ut 3 ad 4, hoc eſt ut 6 ad 8, uti patet ex demonſtratis prop. 39. Quare cùm ratio coni BkC ad conum FkI componatur *e* ex ratione altitudinis Pk ad altitudinem Ak (hoc eſt

d Per cor. 5. p. 15. l. 4. *e Per ſch. p. 15. l. 12.*

ex

ex ratione 9 ad 6,) & ex ratione baſis QT ad baſim ND (hoc eſt ex ratione 6 ad 8,) erit conus BKC ad conum FKI, ut 9 ad 8. Quare cum ſphæra CG quadrupla *f* ſit coni FKI, erit conus æquilaterus BKC ad ſphæram CG, ut 9 ad 32. Quod erat demonſtrandum.

f Per 30. hujus.

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 28.

Conus ęquilaterus ſphęrę circumſcriptus coni ęquilateri eidem ſphęrę inſcripti octupulus eſt.

Coni æquilateri ſphæræ inſcripti, & circumſcripti ſunt SKT, & DOF, & axis communis eſto OKB. Secentur deinde plano per axem tam conus uterque, quàm ſphæra; eruntque ſectiones triangula duo æquilatera, & circulus BPM maximus. Circa triangulum quoque DOF intelligatur deſcriptus eſſe circulus NDOF, & axis OKB producatur in N. Quoniam verò æquilateri trianguli latus DF abſcindit axis ON quartam *a* partem NB, patet NO eſſe duplam BK. Similiter, quia æquilateri alterius trianguli latus ST abſcindit axeos BK *b* quartam partem BC, erit NO ad BO, ut BK ad CK: & permutando ut NO ad BK, ſic BO ad CK. Sed NO dupla eſt BK. Ergo etiam BO dupla eſt CK. Igitur ob ſimilitudinem triangulorum DOF, SKT etiam *c* DF, & ST diametri videlicet baſium conicarum, ſunt inter ſe in proportione dupla. Quare cum coni DOF, SKT ſint ſimiles, ac proinde eorum proportio *d* triplicata ſit proportionis diametrorum DF, & ST, quæ eſt 2. ad 1; erit conus DOF ad conum SKT, ut 8. ad 1. Quod erat demonſtrandum.

a Per corol. 5. p. 15. l. 4.
b per idem corol.
c Per 4. l. 6.
d per 12. lib. 12.

PRO-

PROPOSITIO XLIV.

Sphæra ad circumſcriptum ſibi conum æquilaterum (DOF) & ſoliditate, & ſuperficie eam proportionem habet, quam 4 ad 9. *Fig. 28.*

Sphæra TP eſt ad inſcriptum *d* ſibi conum æquilaterum SkT, ut 32 ad 9. Inſcriptus autem SkT conus æquilaterus eſt ad conum æquilaterum circumſcriptum DOF, ut *f* 1 ad 8, hoc eſt ut 9 ad 72. Igitur ex æquo ſphæra TP eſt ad conum æquilaterum circumſcriptum DOF, ut 32 ad 72; hoc eſt, ut 4 ad 9. Propoſitione autem 40. demonſtravimus etiam ſphæræ ſuperficiem eſſe ad totam æquilateri coni circumſcripti ſuperficiem, ut 4 ad 9. Ergo ſphæra & ſoliditate, & ſuperficie eſt ad æquilaterum conum ſibi circumſcriptum, ut 4 ad 9. Quod erat dem. *d Per 42. hujus.* *f Per præc.*

Quod igitur in ſphæra, & cylindro ſphæram ambiente miratus eſt Archimedes, idipſum in ſphæra, & æquilatero cono ambiente ſphæram jam demonſtravimus, ut videlicet & ſoliditatum inter ſe eadem proportio rationalis, quæ ſuperficierum, exiſtat. Quemadmodum enim ille reperit, ſphæram ad cylindrum eſſe tàm ſoliditate, quàm ſuperficie, ut 2 ad 3; ita nos docuimus, ſphæram & ſoliditate, & ſuperficie eſſe ad conum æquilaterum ſe ambientem, ut 4 ad 9.

Hinc verò illam ipſam proportionem, nempe ſeſquialteram, quam exiſtere ſphæram inter, ac cylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatero cono circumſcripto, & ſoliditate etiam, ac ſuperficie continuari nullo negotio jam demonſtrabimus, atque ita huic pariter opuſculo finem imponemus.

PROPOSITIO XLV.

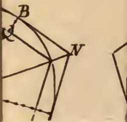
Fig. 30. *Conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus, & cylindrus rectus ſphæræ ſimiliter circumſcriptus, & ipſa ſphæra eandem proportionem continuant, nimirùm ſeſquialteram, tàm quoad ſoliditatem, quàm quoad ſuperficiem totam.*

Nam per 32. hujus cylindrus rectus G K ſphęram ambiens tàm ſoliditate, quàm tota ſuperficie eſt ad ſphæram, ut 3 ad 2, ſive ut 6 ad 4. Per pręcedentem verò circumſcriptus ſphæræ conus æquilaterus B A D, tàm ſoliditate, quàm ſuperficie eſt ad ſphęram ut 9 ad 4. Ergo idem conus eſt ad cylindrum tam ſoliditate, quàm ſuperficie, ut 9 ad 6. Quare hæc tria corpora conus, cylindrus, ſphæra ſunt inter ſe, ut hi numeri 9, 6, 4, ac proinde continuant proportionem ſeſquialteram. Quod erat dem.

FINIS.

Ad majorem Dei gloriam.

Tabul



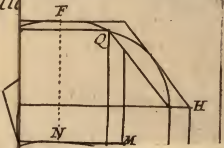
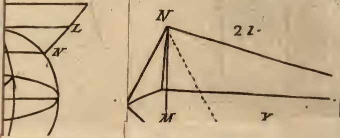


Fig.

Ta



P. ANDREÆ TACQUET E SOCIETATE JESU

Trigonometriæ liber unicus.

CAPUT PRIMUM.

Sinuum Definitiones.

Quid ſinus, Tangentes, Secantes, & quomodo inveniantur.

Sinus, Tangentes, Secantes ſunt rectæ quædam lineæ, quarum in analyſi triangulorum in Geometria practica, in Aſtronomia, aliiſque uſus eſt maximus.

Sinuum Definitiones.

Esto quadrans circuli ACE, cujus circumferentia CE diviſa ſit in partes 90 æquales, quas Gradus vocant, & ſinguli gradus in partes æquales 60, quæ vocantur Minuta, ſic ut totus arcus CE diviſus ſit in partes æquales, ſeu minuta 5400. Ex centro A ad ſingulos gradus, & minuta emittantur rectæ, quarum unam deſigno litteris AF. Coſtituentur hoc facto anguli 5400, quibus ſubtenduntur arcus totidem uno ſeſe invicem minuto excedentes. Ex his unum Fig. 1.

 defi-

deſigno litteris C A F. Primus angulus erit minuti unius, ſecundus duorum minutorum, & ſic porrò; ſexageſimus minutorum 60; hoc eſt gradus unius, & ſic deinceps: poſtremus E A C eſt graduum 90, adeoque rectus. Tandem per minuta ſingula ducantur rectæ ad ſemidiametrum A C perpendiculares, quæ proinde etiam ipſæ numero erunt 5400 computando radium A E, quarum unam deſigno litteris F X. Hæ appellantur ſinus arcuum, & angulorum uno minuto ſeſe mutuò ſuperantium.

1 Igitur arcus ex. gr. F C, & anguli F A C ab ipſo ſubtenſi ſinus eſt recta F X, quæ ab F termino arcus perpendicularis eſt radio A C.

2 Pars radii X C inter arcum, & ſinum interceptа eſt ſinus verſus ejuſdem arcus F C, & anguli F A C.

3 Sinus complementi, ſive ſinus ſecundus arcus F C, & anguli F A C eſt F I ſinus illius arcus, nempe F E, qui quadrantem complet, adeoque & ſinus illius anguli, nempe F A E, qui cum priore F A C complet rectum C A E.

4 Sinus totus, ſive radius eſt ſemidiam. A E.

5 Arcus Q F quadrante major eundem habet ſinum F X, quem arcus minor C F, qui cum eo ſemicirculum conſtituit: & angulus recto major F A Q eumdem habet ſinum F X, quem angulus acutus F A C, qui cum eo efficit duos rectos.

Fig. 2. 6 In omni triangulo rectangulo B A C, latus B C recto angulo oppoſitum, eſt ſinus totus, ſive radius: reliqua verò latera ſunt ſinus angulorum, quibus opponuntur; latus nimirùm A B eſt ſinus anguli O, latus A C ſinus anguli R.

Nam

Nam ſi centro C intervallo C B deſcribatur quadrans F B L, quia latus angulo recto oppoſitum C B, eſt jam radius quadrantis, erit C B ſinus totus per definit. 4; latus verò A B per defin. 1. erit ſinus anguli O, ſeu F C B. Rursùm centro B intervallo B C deſcripto quadrante Q C I patet per eandem defin. 1. A C eſſe ſinum anguli R, ſive Q B C. Ex quo jam nunc apparet, quantus ſinuum futurus in Trigonometria ſit uſus.

Definitiones Tangentium, & Secantium.

Esto circulus B X Z, cujus quadrans B X intelligatur, ut ſuprà, diviſus in gradus, & minuta. Hunc tangat recta infinita B R, & ex centro A ad contactum B ducatur radius A B, qui *a* cum tangente conſtituet angulum rectum. Cogitentur deinde per quadrantis gradus ſingulos, & minuta ex centro A emitti rectæ A F, A L &c. quo facto conſtituentur anguli F A B, L A B &c. ad 5400, ut ſuprà, quibus ſubtenduntur totidem arcus B C, B O, &c. *Fig. 3.* *a Per 18. l. 3.*

7 Arcus igitur BC, & anguli B A F tangens eſt recta B F, ſecans verò A F, ſinus totus A B: ſimiliter arcus B O, & anguli B A L tangens eſt B L, ſecans A L, & ſic deinceps.

8 Arcus quadrante minor B O, & arcus quadrante major Z O cum priore B O faciens ſemicirculum eandem habent tangentem B L, & ſecantem A O L.

9 In omni triangulo rectangulo F B A reſpectu acuti anguli F A B tangens eſt F B ipſi oppoſitum, latus alterum A B ipſi adjacens eſt ſinus totus, ſeu radius; hypotenuſa verò A F, ſeu latus recto angulo oppoſitum eſt ſecans. Patet ex definit. 6. & propoſ. 16. lib. 3. ſi

centro A per B deſcribatur circulus.

Pari modo reſpectu alterius acuti anguli A F B tangens eſt A B, ſinus totus, ſeu radius eſt F B, ſecans F A. Patet ex defin. 8., & prop. 16. lib. 3. ſi centro F per B circulum deſcripſeris.

Hypotenuſa igitur utriuſque acuti ſecans eſt, ac proinde cùm hi anguli inæquales ſunt, diverſis numeris in tabulis ſinuum hypotenuſa exprimitur.

Cæterùm notandæ in primis ſunt, ac probè intelligendæ definitiones 6, & 9. ut Sinus, Tangentes, Secantes ad uſum deducantur.

Sinuum, Tangentium, Secantium inventio.

INvenire Sinus, Tangentes, Secantes, eſt earum proportionem ad radium circuli aut veram, aut à vera inſenſibiliter aberrantem numeris exprimere. Ad eum finem intelligitur circuli radius in plurimas æquales partes diviſus, ut in 100000, aut 1000, 0000. Tum Geometrico ratiocinio inquiritur, quot ex illis radii partibus ſinguli Sinus, Tangentes, Secantes contineant, quæ inventio, ut poſteà oſtendam, eò acuratior futura eſt, quò plures in partes radius circuli diviſus aſſumetur. Hoc ſinuum artificium primi excogitarunt Hipparchus, & Menelaus, horum inventa deinde contraxit, & expolivit Ptolomæus, & noviſſimè Joannes Regiomontanus perfecit, qui ad radium 10000000. Sinus omnium graduum, ac minutorum quadrantis ſupputavit. Denique horum omnium conatus egregios Clavius noſter, Pitiſcus, Rheticus, aliique complures illuſtrarunt. Quamvis autem ab iis omnibus præclarè hoc in genere laboratum ſit, quia

tamen prolixa hujus doctrinæ tractatio eſt, optandum ſanè videtur, ut facilior ea ſtudioſis, atque expeditior, ſi fieri poteſt, efficiatur. Quare animus mihi eſt, artificium quàm utile, tàm pulchrum, & clariùs, quàm cæteri fecerunt, & breviùs exponere. Rem omnem tribus Poriſmatis, & ſex Problematibus abſolvam. Sit ergo.

Poriſma. I.

Dato ſinu (F C), cujuſvis arcus (FB), complementi ſinum (F O) invenire. Fig. 4.

Ducto radio A F, quadratum A F *a* æquatur quadratis F C, A C. Quare ſi ex quadrato radii, ſeu ſinus totius auferas quadratum ſinus dati F C, remanet quadratum A C, hoc eſt quadratum F O. Igitur radix quadrata inde extracta dabit rectam F O ſinum complementi quæſitum.

a Per 47. l. 1.

Poriſma. II.

Dato ſinu (C F), cujus arcus (I C,) ſinum ſemiſſeos ejuſdem arcus invenire. Fig. 5.

Arcui I C ſubtende rectam I C, ad quam è centro perpendicularis ſit A L, quæ tàm *b* rectam I C, quàm arcum *c* I L C biſſecabit, ac proinde I O eſt ſinus arcus L I ſemiſſeos arcus I L C.

Ex ſinu dato C F per præcedentem inveniatur ſinus complementi CQ, ſeu F A, quo ablato ex ſinu toto A I, nota fit F I. Nota igitur eſt ſumma quadratorum I F, C F, hoc eſt *d* quadrati I C. Ex quo eliciatur radix qua-

b Per 3. l. 3.
c Per 3. l. 3.
d 47. l. 1.

drata dabit ea rectam IC, ejuſque ſemiſſis ſinum quæſitum IO.

Poriſma III.

Fig. 6. D*Atis ſinibus* (*LX, FR*) *duorum arcuum* (*LB, FB*), *quorum differentia non ſit major* 45 *minutis*, *ſinuum* (*IS*) *arcus cujuſdam medii invenire*.

Ducatur perpendicularis FOQ. Erunt LQ, IO differentiæ ſinuum LX, IS ad ſinum FR: Et quia arcus LF eſt non major 45 minutis, adèoque parvus, non different arcus LF, IF ſenſibiliter à rectis lineis, ac proinde LFQ, IFO aſſumi poſſunt ut rectilinea triangula. Quia ergo IO eſt parallela LQ erit *a*

a Per Coroll. 1. prop. 4. l. 6.

ut datorum arcuum maximi, & minimi differentia LF	ad arcus medii, & minimi differentiam IF
ita ſinuum datorum maximi, & minimi differentia LQ	ad ſinus medii, & minimi differentiam IO

Quare cùm hujus analogiæ tres primi termini ſint noti, etiam quartus IO innoteſcet, quem ſi addamus ſinui dato minori FR, notus erit medius quæſitus IS.

Lemma.

Fig. 7. S*Emiſſis ſubtenſæ* (*CB*) *alicujus arcus* (*CFB*) *eſt ſinus ſemiſſeos ejuſdem arcus*.

Ex centro A ducatur radius AGF ad CB perpendi-

pendicularis. Erit ergo C G per defin. 1. ſinus arcus C F. Atqui per 3. lib. 3. C G eſt ſemiſſis G B, & per 30. lib. 3. C F ſemiſſis C F B. Ergo &c

Problema I.

Sinum arcus 45 graduum invenire.

QUadrantem C F B ſubtendat recta C B, ad quam ex centro A ſit perpendicularis A G F. Quoniam igitur arcus C B 90 grad. *a* biſectus eſt in F, erit F B arcus graduum 45, cujus ſinus eſt B G. Deinde ergo ob æqualitatem laterum A C, A B anguli *b* quoque A C B, A B C æquales ſunt, qui verò ad A rectus erit. Ergo *c* A B C, ſeu A B G ſemirectus. Eſt autem *d* A G B rectus reliquus ergo B A G *e* ſemirectus eſt, ideoque par ipſi A B G. Ergo latera B G, A G *n* ęqualia ſunt. Ergo, quia quadratum A B æquatur *f* utrique quadrato B G, A G, unius quadrati B G duplum erit. Semiſſis ergo quadrati ſinus totius A B æquatur quadrato ſinus 45 graduum B G. *Fig. 7.* *a Per 30. l. 3.* *b Per 5. l. 1* *c Per Coroll. 11. prop. 32. l. 1.* *d Per hyp.* *e Per 32. l. 1.* *n Per 6. l. 6* *f Per 47. l. 1.*

Quare ſi ex ſemiſſe quadrati ſinus totius eliciatur radix quadrata, dabit ea ſinum 45 grad. qui, quarum partium ſinus totus ponitur 10000000, reperietur earundem eſſe 7071068 ferè.

Problema. II.

Arcuum 60, & 30 graduum ſinus invenire.

ESto quadrans BC; arcus B F graduũ 60, & ſinus ejus D F. Erit ergo arcus F C graduũ 30, cujus ſinus *Fig. 8.*

ſinus ſit F G; ducatur autem B F, & ex centro A F. Quoniam arcus B Q F eſt grad. 60. hoc eſt ſexta pars circumferentiæ circuli, erit B F latus hexagoni, ideoque *a* æquale radio A F. Anguli *n* igitur ad A, & B in triangulo A F B ęquales ſunt. Cùm igitur in triangulis X, Z ęquales ſint anguli F B D, F A D; item anguli F D B, F D A utpote recti; latus verò F D commune, erunt *b* quoque latera B D, A D ęqualia: ac proinde quadratum B D eſt quarta pars quadrati ſinus totius A B, ſeu F B; ſed quadratum F B ęquatur *c* quadratis B D, F D. Auferatur ergo quarta pars quadrati ſinus totius, ſive quadratum ſemiſſeos A D ſinus totius à quadrato ſinus totius F B, remanebit quadratum F D, cujus radix quadrata dabit rectam F D, ſinum 60. graduum. Poſito igitur ſinu toto 10000000 ſinus grad. 60. eſt 8660254.

a Per coroll. 1. p. 15. lib. 4.
n Per 6. lib. 1.
b Per 27. lib. 1.
c Per 47. lib. 1.

Sinus porrò F G grad. 30. eſt ſemiſſis ſinus totius, utpote ęqualis ipſi D A. Idem patet ex lemmate. Poſito igitur ſinu toto 10000000 ſinus grad. 30. eſt 5000000.

Problema III.

Sinum 36 graduum invenire.

Fig. 9.

ESto ſemicirculus F B G, cujus baſi radius A B rectus inſiſtat. Tum radio A G biſecto in D ducatur recta D B, quę transferatur ex D in C. Recta B C erit *a* latus pentagoni circulo inſcripti.

a Ptolom. l. 1. almag.

Ex ſumma quadratorum A B radii, ſive ſinus totius, & A D ſemiſſeos radii extrahe radicem quadratam, dabit ea *b* rectam D B, hoc eſt D C. Ex D C aufer D A ſemiſſem

b Per 47. lib. 1.

radii

radii, fiet nota A C, cujus quadratum adde quadrato radii A B, notum fiet *c* quadratum C B, ex quo radix elicienda dabit B C latus pentagoni ſubtendens gradus 72. Illius ergo ſemiſſis *d* dabit ſinum 36 graduum. Poſito ſinu toto 10000000, ſinus grad. 36. reperietur partium 5877852. *c Per 47. lib. 1.* *d Per lem.*

Corollarium.

EX ſinu grad. 36. reperietur *e* ſinus complementi, nempe grad. 54. partium 8090170. *e Per Poriſ. 1.*

Problema. IV.

Sinum graduum 12 invenire,

IN quadrante C B ſit arcus B F graduum 30, K B grad. 54, & eorum ſinus D F, G K. Igitur erit eorum differentia K F grad. 24. complementa verò erunt F C, grad. 60, K C grad. 36, quorum ſinus ſint P F, N K. *Fig. 10.*

Sinus N K grad. 36. inventus per Probl. 3. auferatur ex ſinu P F grad. 60. invento per Probl. 2. remanebit O F nota. Tum ſinus F D grad. 30. inventus per Problema 2. dematur ex ſinu K G grad. 54. invento per Coroll. pręced. remanebit O K nota. Radix ſumma quadratorum O F, O K dabit *a* K F ſubtenſam 24 grad. illius verò ſemiſſis dabit *b* ſinum graduum 12. *a Per 47. lib. 11.* *b Per lem.*

Problema V.

Sinus omnium arcuum quadrantis ſeſe ordinatim uno minuto ſuperantium invenire.

EX quatuor ſinibus per præcedentia quatuor Problemata graduum videlicet 45, 60, 36, 12 reliquos ſinus omnes adminiculo trium Poriſmatum pręmiſſorum inveniemus hunc in modum.

Ex ſinu graduum 45 inveniuntur ſinus ſeptem.

PRoblemate 1. inventus eſt ſinus arcus grad. 45, ſumatur graduum 45 ſemiſſis grad. 22, 30. & ſemiſſis horum grad. 11, 15. quę amplius biſecari nequit, ſinus harum ſemiſſium reperiuntur per poriſma 2. nimirùm ex ſinu grad. 45. reperitur ſinus grad. 22, 30. & ex hoc ſinus grad. 11, 15.

ex 45 gradibus
ſemiſſes 22, 30. 11, 15.

Accipiantur deinde harum ſemiſſium complementa; complementum arcus totius grad. 45, quia ipſi ęquale, tanquam inutile omittitur.

ex ſemiſſibus 22, 30. 11, 15.
Complementa 67, 30. 78, 45.

horum complementorum ſinus reperiuntur per Poriſ. Rursùm ex his complementis ſumantur ſemiſſes ſemiſſium, quoties poſſunt; tum complementa ſemiſſium, donec complementum occurrerit, quod biſecari nequeat.

Ex

Ex compl. 67, 30. 78, 45.
Semiſſ. 33, 45. nulla.
Compl. 56, 15.
Semiſſ. nulla.

Complementa poſtrema erant grad. 67, 30. & grad. 78,45. Ex poſteriori, quia biſecari nequit, nihil ultrà eruitur. Prioris, nempe grad. 67, 30. ſemiſſis eſt grad. 33,45. cujus ſinus per Poriſ. 2. obtinetur. Hujus complementum eſt grad. 56, 15, cujus ſinus reperitur per Poriſ. 1. Quia verò complementum hoc ultimum non poteſt biſecari, hic terminus erit inveniendi ex ſinu graduum 45. Igitur ex ſinu graduum 45. inventi jam ſunt ſinus ſeptem, quorum inventionis ſeries in tabella appoſita exhibetur.

	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G	M.
	o	*l*	o	*l*	o	*l*	o	*l*
	90	0	45	0				
Semiſſ.					22	30	11	15
Compl.					67	30	78	45
Semiſſ.					33	45		
Compl.					56	15		

Ex ſinu graduum 60 inveniuntur ſinus 16.

ARcus 60. graduum biſecetur quoties poteſt, & accipiantur ſemiſſium complementa, quæ iterùm biſeca, quoties potes, tum ſemiſſium rursùm accipe complementa, quæ denuò biſeca, & biſectionis complementum aſſume. Ex hac alterna acceptione, quæ ſexies repetita eſt, habentur arcus 16, quorum

ſinus

ſinus per Poriſma 2, & 1 alternatim accepta invenientur.

Sinus grad. 60 ejuſque ſemiſſes		Cōplementa		Semiſſes Complementorum.		Compl.		Semiſſ.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l
60	0										
30	0										
15	0	75	0	37	30	52	30	26	15	63	45
				18	45	71	15				
7	30	82	30	41	15	48	45				
3	45	86	15								

Alternam ſemiſſium, & complementorum ſeriem exhibet tabella hìc appoſita; atque ita ſi hactenùs inventi ſinus ordinentur adnumerato ſinu toto grad. 90. habebimus 24. ſinus arcuum ſeſe gradib. $3\frac{1}{45}$ ſuperantium.

Ex ſinu graduum 36 habentur ſinus 32.

SI enim arcus grad. 36. accipiatur ſemiſſis, & ſemiſſis ſemiſſeos, & ſic deinceps. Deinde ipſius ſinus 36, & omnium ſemiſſium complementa, ac rursùm ſemiſſes complementorum; eaque alterna ſemiſſium, ac complementorum acceptio octies repetatur, provenient arcus 32. quorum ſinus per Poriſma 2. & alternatim reperientur. Seriem inventionis horum 36 arcuum exhibet tabella ſubjecta.

Sinus

Sinus grad. 36 cũ ſuis ſemiſſ.		Cõple-menta.		Semiſſ. Cóple-mento-rum.		Cõple-menta.		Semiſſ.		Cõple-menta.		Semiſſ.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
°	l	°	l	°	l	°	l	°	l	°	l	°	l	°	l
36	0	54	0	27	0	63	0	31	30	58	30	29	15	60	45
								15	45	74	15				
				13	30	76	30	38	15	51	45				
				6	45	83	15								
18	0	72	0												
9	0	81	0	40	30	49	30	24	45	65	15				
				20	15	69	45								
4	30	85	30	42	45	47	15								
2	15	87	45												

Ex ſinu 12. *graduum inveniuntur ſinus* 64.

HUnc in modum . Ex ſinu 12 accipiatur ſemiſſis, & ſemiſſis ſemiſſeos, & ſic porrò, tum ipſius 12, & omnium ſemiſſium complementa ſumantur deni ſemiſſes complementorum, ac rurſùs ſemiſſium complementa &c. Hęc alterna ſemiſſium, ac complementorum acceptio, ſi duodecies repetatur, provenient arcus 64, quorum ſinus invenientur per Poriſma 2, & 1. Seriem inventionis dictorum 64 arcuum exhibet tabella hìc adjecta.

Sinus grad. 12 ejuſque ſemiſſ.		Cõple-menta.		Semiſſ. Cõple-mento-rum.		Cõple-menta.		Semiſſ.		Cõpl.		Semiſſ.		Compl.		Semiſſ.		Cõpl.		Semiſ.		Cõpl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
°	l	°	l	°	l	°	l	°	l	°	l	°	l	°	l	°	l	°	l	°	l	°	l
12	0	78	0	39	0	51	0	25	30	64	30	32	15	57	45								
								12	45	77	15												
				19	30	70	30	35	15	54	45												
				9	45	80	15																
6	0	84	0	42	0	48	0	24	0	66	0	53	0	57	0	28	30	61	30	30	45	59	15
																14	15	75	45				
												16	30	73	30	36	45	53	15				
												8	15	81	45								
				21	0	69	0	34	30	55	30	27	45	62	15								
								17	15	72	45												
				10	30	79	30	39	45	50	15												
				5	15	84	45																
3	0	87	0	43	30	46	30	23	15	66	45												
				21	45	68	15																
1	30	88	30	44	15	45	45																
0	45	89	15																				

Quòd ſi ſinus omnes hactenùs inventos ſinu toto adnumerato ſimul in ordinem redigamus, ſinus habebimus 120 arcuum ſeſe mutuò 45 minutis ſuperantium, quorum primus eſt 45 minutorum, ultimus grad. 90.

G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l
o	o	3	o	6	o	9	o
o	45	3	45	6	45	9	45
1	30	4	30	7	30	&c.	&c.
2	15	5	15	8	15	90	o

***Ex his* 120 *Sinibus*.**

Reliquos omnes intermedios ope tertii Poriſmatis per regulam proportionum reperiemus hoc ordine.

Primò quæremus inter ſingulos horum 120 ſinuum duos medios duorum arcuum minutis 15 differentium, quibus ad priores 120 adjunctis, habentur ſinus arcuum 358, 15 minutis invicem excedentium.

Deinde inter ſingulos jam inventos duo quærentur medii duorum arcuum minutis 5 differentium, quibus additis ad priores 358 proveniunt ſinus arcuum 1076 ſe minutis 5 ſuperantium.

Denique inter illos ſingulos quæremus medios quatuor arcuum uno ſe minuto excedentium, quos ſi addamus illis 1076, habentur ſinus 5400, omnium videlicet arcuum quadrantis uno ſe minuto ſuperantium.

pro

Problema, VI.

Secantes, & Tangentes quaſcunque invenire.

EX ſinibus jam inventis hæ lineæ nullo negotio innoteſcent. *Fig.* 3.

Arcus cujuſcunque B S ex gr. 70, 15. ſecans eſto A R, tangens B R, ſinus totus A B. Oporteat ſecantem A R invenire. Duc S k ſinum arcus S B, & S N ſinum complementi S X. Per prop. 4. lib. 6. ut A k (ſeu N S) eſt ad A S, ita A B, (ſeu A S) eſt ad A R. Sunt ergo tres proportionales)

NS	AB	AR
Sinus compl. arcus dati grad. 70, 15.	Sinus totus 10000000.	Secans quęſita

Quare ſi quadratum ſinus totius dividatur per N S ſinum complementi arcus dati, quotiens dabit ſecantem quæſitam A R, ut patet ex 18. lib. 9.

Oporteat deinde dati cujuſcumque arcus B S tangentem reperire B R. Per prop. 4. lib. 6. ut A k (ſeu N S) eſt ad k S, ita A B ad B R. Sunt ergo proportionales.

NS	kS	AB	BR
Sinus compl. arcus dati	Sinus arcus dati	Sinus totus 10000000	Tangẽs quæſita

Quare cùm tres primi termini ſint noti, per regulam trium innoteſcet quartus.

Habent igitur ſtudioſi, quod ſuprà promiſeram, Sinuum, Tangentium, & Secantium theoriam tribus

poriſmatis, & problematis ſex comprehenſam. Scio, plures alias eſſe ſinuum reperiendorum vias, ſed ea, quam propoſui, cæteris explicatu, ac demonſtratu mihi eſt viſa facilior.

Problema VII.

Sinum unius, vel plurium Secundorum Minutorum invenire.

Fig. 4. REpræſentet P B arcus unius minuti, ſeu 60 ſecundorum, k B verò arcum 26 ſecundorum ex gr. ſinus verò iſtorum arcuum ſint P M, k N. Quoniam hi arcus inſenſibiliter differunt à rectis lineis, aſſumi poſſunt triangula P B M, k B N tanquam rectilinea. Igitur per 4. lib. 6.

Ut P B 1 Min. ſeu 60 ſecun.	ad k B 26 ſecun.	ita P M ſinus 1 Min.	ad k N ſinum 26 ſecun.

Quare per regulam trium reperietur ſinus k N 26 ſecundorum, multiplicando videlicet ſecundum 26 per tertium, nempe 2909 ſinum 1 minuti, & productum dividendo per primum, nempe 60 ſecun.

Hoc opere reperitur ſinus unius minuti ſecundi 49 $\frac{29}{60}$ poſito ſinu toto 10000000. licebitque eadem methodo reperire ſinum unius tertii, & ſic in infinitum.

Pro-

Problema VIII.

Invenire ſinum arcus, qui præter gradus, & minuta prima, etiam ſecunda contineat.

INveniendus ſit ex. gr. ſinus graduum $36.20'$, $16''$. Arcum grad. $36.20'$. proximè minorem dato repræſentet FB; arcum verò dato proximè majorem, nempe grad. $36.21'$ referat LB. Arcum datum grad. $36.20'\ 16''$, qui inter hos medius eſt, referat IB. Sinus autem horum trium arcuum ſint LX, FR, IS, & ducatur perpendicularis FOQ. Arcus igitur LF eſt $1'$, ſeu $60''$ arcus IF, $16''$, LQ differentia Sinuum LX grad. $36,21'$ & FR grad. $36\ 20'$. Quoniam igitur arcus LF, utpote $1'$, inſenſibiliter differt à recta linea, & multò adhuc minùs arcus IF, $16''$, erit per propoſ. 4.l. 6. *Fig. 6.*

Ut LF ad IF ita LQ differentia ad IO diff.
$60''$ $16''$ Sinuum &c. ſinus &c.

Quare cùm tres primi termini ſint noti, etiam innoteſcet quartus, differentia IO, quæ addita FR ſinui grad. $36.20'$. dabit ſinum quæſitum 15. gra. $36.20'$. $16''$.

Problema IX.

Dato Sinui arcum aſſignare.

SInum datum quære in tabulis. Si eum reperìes, arcum illi debitum habes adſcriptum, ſi nõ reperies, quære eo proximè & majorem, & minorẽ, quos

 referat

referat L X, F R, datum verò repræſentet I S. Ducta perpendiculari F O Q, erit per 4 lib. 6.

L Q exceſſus.

Ut Sinus L X proximè majoris
dato ſupra minorem F R
ad
I O exceſſum
ſinus dati I S
ſupra minorem F R
ita
arcus L F
60 ſecund.
ad
numerum ſecundorum,
quæ debentur arcui I F.

Quare cùm tria prima ſint nota, etiam quartum innoteſcet, numerus nempe ſecundorum debitus arcui I F, qui additus gradibus, ac minutis arcus noti F B dabit arcum debitum ſinui dato I S.

Atque hæc quidem hactenùs de Sinuum, Tangentium, & Secantium inventione. Reliquum eſt, ut quædam ad plenam hujus rei theoriam facientia ſequenti Scholio declaremus.

Scholium.

Quæſtio eſt, cur radius circuli in tot partes diviſus aſſumatur.

UT hujus aſſumpti cauſa intelligatur, meminiſſe debemus, omnes Sinus, Secantes, & Tangentes inventas eſſe vel per radicis extractionem, vel per Regulam proportionum. Et quidem illi 120 *ſinus arcuum*

cuum ſe invicem 45 minutis ſuperantium per extractionem radicis reperti ſunt, ut patet ex Problem. 1, 2, 3, 4, 5. Cæteri verò omnes inter hos medii ex illis 120 per proportionis regulam innotuere, ut ex Problematis 5 poſtrema parte conſtat. Tangentes autem, & Secantes ex ſinibus jam notis per regulam eandem reperta ſunt, quemadmodum Problem. 6. oſtenſum eſt. Jam verò numeri, è quibus radix fuit elicienda, ut plurimùm ſunt non quadrati, ex quibus ſi radicem educas, ea ſemper à vera, quæ (ut lib. 3. Arith. cap. 6. demonſtravi) impoſſibilis eſt, differet exceſſu, defectuve aliquo, minore tamen, quàm ſit unitas. Hæc porro differentia, quæ ob fractionum in ſupputando moleſtiã negligitur, eò minoris momenti erit, quò major fuerit numerus ille, è quo radix educta fuit. Erit autem ille numerus eò major, quò radius in partes plures diviſus aſſumetur. Exemplũ ſtatuamus in ſinu 45 graduũ, quem Probl. 1. docuimus obtineri, ſi ex ſemiſſe quadrati ſinus totius radicem extraxeris. Si numerus radii, ſeu ſinus totius aſſumatur magnus, qualis hic eſt 10000000, illius etiam quadratus, adeoq; & quadr. ſemiſſis 50000000000000 multò erit major. Porrò radix integra, quę elici poteſt ex 50000000000000, eſt 7071067, quæ quia ex maximo numero elicita eſt, etiam ipſa magnus eſt numerus. Unde fit, ut ipſius à radice vera impoſſibili defectus, qui ſemper unitate minor eſt, ad ipſam proportionem habeat inſenſibilem, proindeque tutò, & abſque ſenſibili errore ullo negligatur. Hanc igitur ob cauſam tantus numerus partium ſinus totius aſſumi debet. Verùm, ut hujus rei cauſa manifeſtior evadat, omnia errorum capita exactiùs eruntcolligenda. Primum caput erroris eſt in ſinibus illis primis 120, quos repe-

rire oportuit per eductionem radicis ex numeris non quadratis. In reliquis deinde, qui ex his per regulam prop. eliciuntur, idemque proinde vitium participant, alii duo inſunt errores proprii, videlicet Fig. 6. *quòd in triangulis L F Q, I F O arcus L F 45, & arcus I F 15, aut 5 aſſumantur tanquam rectæ lineæ; atq; inſuper, cùm regula proportionum exercetur, quòd fractio ex diviſione reſidua negligatur. Quo vitio poſtremo etiam Tangentes, & Secantes, quæ omnes ex ſinibus per prop. reg. obtinentur, laborent neceſſe eſt. Denique cùm ſinus perpauci tantum immediatè reperiantur, cæteri verò ſinus omnes deducantur ex invicem, ex ſinibus autem Tangentes, & Secantes, manifeſtum eſt, ſingulos præter errores ſibi proprios contrahere etiam vitia eorum, è quibus ipſi derivantur; unde fit, ut error, qui in ſinu immediatè invento ſimplex erat, in ſecundo quaſi duplicetur, in tertio triplicetur, & ſic deinceps. Unde conſequens eſt, eò ſinus eſſe accuratiores, qui ex paucioribus derivantur; exactiſſimos verò eſſe eos, qui immediatè, hoc eſt ex aliis nullis inventi ſunt. Ex his ergo capitibus Sinuum, Tangentium, Secantium defectus oriuntur, qui ne eſſent notabiles, ſed quodammodo evaneſcerent, radium maximo partium numero diviſum aſſumere oportuit; & quamvis defectus illi ſint non unus, ſed (ut jam oſtendi) plures, tamen quòd ſinguli nullius ferè momenti ſunt, etiam ſimul juncti errorem vix ſenſibilem inducunt, ſi aſſumatur ſinus totus partium admodùm multarum; qua enim proportione augetur numerus radii, eadem creſcunt numeri ſinuum, ac proinde errores, qui in iis ſupputandis committi debent, magis evaneſcunt.*

Deinde iſtud etiam tyrones intelligant, ſi Sinus, Tangentes, Secantes accipiantur ad ſinum totum

10000000. *quales paſſim in tabulis reperiuntur abjectis duabus primis notis haberi Sinus, Tangentes, Secantes ad radium* 100000, *totidem videlicet cyfris mulctatum. Ex. gr. poſito radio* 10000000 *Sinus* 8 *grad. eſt* 1391731, *ſi cupiam minorem ad radium* 100000, *omiſſis duabus primis notis, is erit* 13917; *talis enim Sinus, Tangentis, Secantis differentia à majori ſolùm erit fractio, cujus numerator ſint notæ abjectæ, denominator verò ſinus totus duobus cyfris mulctatus. Itaque ſinus* 8. *grad.* 13917 *minoris à majori* 1391731, *differentia erit* $\frac{31}{100000}$ *diametri. Ratio pendet ex natura logiſticæ decimalis, quam expoſui Arithm. Practicæ lib.* 2. *cap.* 9. *& ſeq. præſertim ex Theor.* 1. *&* 2. *c.* 10. *Poſtremò hoc imprimis hìc obſervabitur, cùm Sinus, Tangentes, Secantes expetuntur reſpectu radii ex gr.* 100000, *exactiores fore eas lineas, ſi ſupputentur reſpectu ſinus* 10000000 *datum excedentis duabus cyfris, & ab iis ita ſupputatis totidem primæ notæ, ut jam dictum eſt, abjiciantur. Ratio eſt, quia errores ſinuum multis notis conſtantium, non verſantur niſi in primis notis. Ita Regiomontanus, cùm ſinus cuperet ad partes radii* 600000, *aſſumpſit radiū* 600000, 00000, *& à ſinibus ad eum radium ſupputatis primas quatuor notas ſuſtulit. Similiter Rheticus, ut haberet ſinus ad radiū* 1000000000 *aſſumpſit radiū* 100000, 00000, 00000, *& à ſinibus per hunc repertis præſcidit quinq; notas primas. Quo artificio obtinetur, ut notæ reſiduæ omnes veræ exiſtant, ac proinde ſinus ita reperti à veris non deficiant per unam integram earum partium, quarum radius in tabulis, ſive canone aſſumitur. Et tales ſunt ii omnes, qui in tabulis paſſim deſcripti ſunt.*

CA-

CAPUT II.

Triangulorum rectilineorum Analyſis.

TRiangulum omne, quod per ſe manifeſtum eſt, tria latera habet, & angulos tres, quæ ſimul juncta ſenarium numerum efficiunt. Ex his tria ſemper nota ſint oportet, ut tria reliqua, quæ ſunt ignota, cognoſcantur. Scientia igitur ea, quæ ex tribus datis, ſive cognitis docet tria reliqua incognita invenire, *Analyſis Triangulorum* ab aliis *Trigonometria* appellatur. Hoc invento vix aliud, ſeu præſtantius, ſeu utilius. Quod ex nunc tyrones, ut vel eminus perſpiciant, non ea ſolùm triangula contemplari debent, quæ in carta, vel tabula delineantur; ſed ab his cogitationes ſuas transferre ad ea oportet, quæ in campis, atque in aere, imò & in ipſo cœlo per radios viſuales, & ipſas rerum diſtantias, longitudineſque deſcribuntur. Opportunum erit ex iis, quæ poſteà erunt uberiùs explananda, exemp. unum, alterumve quaſi ad rei totius ſpecimen aliquod affare. Inter Problemata Trigonometriæ hoc erit inter cætera unum, quî dato uno latere trianguli rectanguli, & angulo acuto uno, reliqua latera quanta ſint, inveniri poſſint.

Fig. 11. Ex hoc Problemate montis, aut turris altitudinem metiri poteris. Turris alicujus altitudinem referat recta QF; diſtantiam verò oculi ab eadem recta AQ horizontalis, cum qua rectum angulum conſtituit altitudo FQ; radium viſualem extentum à turris apice F ad oculum in A repræſentet recta FA. Habemus triangulum rectangulum intelligibile in aere deſcriptum,

ptum cujus unum latus eſt A Q diſtantia oculi à turre, alterum Q F ipſa turris altitudo, tertium radius viſualis A F. In hoc triangulo angulus Q A F (ut ſuo loco oſtendam) fit notus inſtrumento; latus A Q diſtantia jam ſupponatur nota. Ex his duobus cognitis angulo videlicet acuto Q A F, & diſtantia A Q, per univerſale Problema jam dictum invenietur quanta ſit altitudo turris Q F. Adjungamus & alterum. Inter cætera Problemata Trigonometrica etiam iſtud occurrit: datis in triangulo quolibet duobus angulis, quæ ſit laterum inter ſe proportio, invenire.

Ex hoc Problemate ad diſtantiam Lunæ à Terra dimetiendam via aperitur. Centrum Lunæ eſto C, centrum terræ A, oculus in ſuperficie terræ in B; ſemidiameter orbis Terræ A B. Cogitentur tàm ex terræ centro A, quàm ab oculo B extendi rectæ ad Lunæ centrum C. Quo facto conſtituitur triangulum à Terra ad Lunam pertingens, cujus unum latus eſt ſemidiameter Terræ A B, reliqua duo ſunt diſtantiæ tàm centri Terræ, quàm ipſius oculi à centro Lunæ. In hoc triangulo angulus A C B aſtronomico artificio innoteſcit, angulus verò A B C fit notus per inſtrumentum. Itaque ex his duobus angulis jam cognitis per univerſale Problema jam dictum innoteſcet, quæ ſit proportio lateris C B, vel A C ad latus A B; hoc eſt, quoties diſtantia lunæ à terra ſemidiametrum terræ contineat: ac proinde cum alio jam artificio, quot milliaria radius terræ contineat, innotuerit, ipſa etiam diſtantia Lunæ à terra in milliaribus innoteſcet. Ad tantæ rei notitiam nos deduxit problema hujuſmodi, quod tyro fortè aliquis nullius eſſe uſus judicaſſet. Hęc ergo dicta ſint in gratiam eorum, *Fig.* 12.

qui-

quibus illud in ore ſemper, cui uſui, ut ex his etiam cætera, quorum uſum non perſpiciunt, æſtimare diſcant.

Annotationes quædam pro Tyronibus.

PRiuſquam vltrò tendamus, expediet hìc in memoriam revocare nonnulla, quæ in Elementis traduntur, in quibus ſub hæc initia hærere plerumque tyrones ſolent. Prætereant iſta, qui his non indigent.

1 Datum, & notum idem ſignificant in hac materia.

2 Circumferentiam circuli partiri ſolent Mathematici in partes æquales 360, quas gradus appellant, & harum ſingulas rursùs in 60 æquales, quas minuta vocant.

3 Arcus circuli, ſeu pars circumferentiæ nota dicitur, cùm ſcitur, quot gradus contineat, tunc enim arcus ille, quanta ſit totius circumferentiæ pars, innoteſcet.

Fig. 13. 4 Angulorum menſuræ ſunt arcus circuli, qui ex vertice anguli tanquam centro inter ejus crura deſcribuntur. Sic anguli C menſura eſt arcus O Q centro C deſcriptus inter anguli crura CA, CB. Patet ex ultima lib. 6. Hac de cauſa angulus C dicitur eſſe tot graduum, quot graduum eſt ille arcus O Q, ut ſi arcus O Q eſt grad. 32, etiam angulus C erit graduum 32.

5 Angulus ille C dari, ſeu notus eſſe dicitur, quando ſcitur, quot graduum ſit, hoc eſt, quot graduum ſit arcus O Q inter ejus crura ex vertice, ut centro deſcriptus.

6 Angulus rectus dicitur 90 graduum, quia arcus inter ejus latera centro vertice deſcriptus eſt 90 grad.

grad. ſeu quarta pars circumferentiæ totius.

Et duo recti dicuntur grad. 180; quia arcus inter eorum crura deſcriptus, eoſque ſubtendens, eſt grad. 180, ſemiſſis nempe circumferentiæ.

Et quatuor recti dicuntur efficere 360 grad. quia ſubtenduntur à tota circumferentia.

7 Si ex anguli vertice ut centro inter ejus latera plures deſcribantur arcus O Q, S V; minor æquè eſt menſura anguli, ac major; quia minor æquè magna pars eſt ſuæ circumferentiæ totius, ac major ſuæ, ac proinde ſi arcus major O Q eſt ex. gr. 32 graduum, quorum tota circumferentia major O Q L H eſt 360, etiam minor arcus S V eſt graduum 32, quorum minor circumferentia S V R T eſt 360. Patet ex Corol. 3. prop. 33. lib. 6. *Fig.* 14.

8 Cujuſcunque trianguli tres anguli ſimul ſumpti efficiunt grad. 180. Quia per 32. lib. 1. tres illi anguli ſimul ſumpti ſemper efficiunt duos rectos, ac proinde, ſi ex angulorum verticibus A, B, C tanquam centris inter trianguli cujuſvis crura deſcribantur, eodem intervallo circini, tres arcus F G, XZ, O Q ſimul ſumpti ſemper conflabunt ſemicirculum, hoc eſt arcum 180 graduum. Nam ſi centro C perficiatur ſemicirculus O Q P, & arcus F G tranſcribatur ex Q in L; tertius arcus XZ æqualis erit reſiduo LP, adeoque tres ſimul arcus OQ, FG, XZ conficiunt integrum ſemicirculum O Q L P. *Fig.* 14.

9 Cùm in triangulo A B C quocunque, noti ſint duo anguli A grad. 125, B grad. 34. etiam C tertius innoteſcit, ſi utriuſque dati gradus 159 ſubtrahantur à 180 gradibus. Remanent enim gradus 21 tertii anguli C. Patet ex annotatione 8, & ex 32 lib.

lib. 1. Atque hac de cauſa datis duobus angulis, etiam tertius dicitur eſſe datus.

Fig. 25. 10 Pari ratione, ſi in quovis triangulo (ABC) notus ſit unus angulus (B grad. 39.) innoteſcit etiam ſumma reliquorum (C, A) ſi gradus anguli noti (B grad. 39.) ſubtrahantur à 180 gradibus; remanent enim gradus (141) ſummæ duorum reliquorum (C, A). Patet ex annotat. 8, & 32. lib. 1. Et hac de cauſa dato uno angulo, dicitur & ſumma reliquorum dari.

Fig. 16. 11 In triangulo rectangulo (B A C) dato acuto uno (C grad. 31) etiam acutus alter (B) innoteſcet, ſi acuti dati (C grad. 31) ſubtrahantur à gradibus 90, remanent enim grad. (59) pro acuto altero B. Patet ex annotat. 8, & 32. lib. 1. Et hac de cauſa in triangulo rectangulo, cùm datur acutus unus, dari dicitur etiam alter.

12 Quatuor termini A, B, C, Z dicuntur proportionales, cùm primus A eſt ad ſecundum B, ut tertius C ad quartum Z

ut A ad B,
ita C ad Z

13 Termini noti ſunt, qui numeris exprimuntur, hoc eſt, quando ſcitur, quot partes alicui certæ æquales contineant.

14 Cùm è quatuor proportionalibus tres termini ſunt noti, quartus verò incognitus, is ſemper innoteſcet, ſi ſecundus multiplicetur per tertium, & productus numerus dividatur per primum, quotiens enim diviſionis erit quartus, qui latebat.

Atque hæc eſt regula, quæ vulgò proportionum, ſive trium, & ob ſummam utilitatem Aurea appellatur, demonſtrata eſt prop. 19. lib. 9. de qua vide plura lib. 4. Arithm. cap. 1.

Dato angulo, datur ex tabulis ſinus eiuſdem: & dato

dato ſinu datur angulus; ut ſi detur angulus grad. 40, 16. gradus quære in vertice tabulæ, minuta autem 16 in columna prima ad lævam.

His adſcriptum reperies non ſolùm ſinum illis debitum 6463460, ſed etiam tangentem 8470620, & ſecantem 13105396. Contrà ſi detur ſinus ex gr. 6563460, cujus angulum ignores, quære in columua ſinuum numerum datum; vel ſi non reperiatur, ei proximè æqualem, in columna prima ad lævam reperies minuta, & in vertice gradus anguli quæſiti.

Denique hoc obſerva: in analyſi trianguli rectanguli quamvis ſolùm duo data exprimantur; ut duo latera, vel unum latus cum uno acuto; tamen datum tertium ſemper eſt ipſe angulus rectus, qui quia per ſe notus eſt, & triangulo rectangulo nominato ſatis ſubintelligitur, ulteriùs exprimi non ſolet.

ANALYSIS
TRIANGULI RECTANGULI.

PROBLEMA PRIMUM

Datis omnibus angulis laterum proportionem invenire.

Fig. 15. BAſi A C adſcribe totum ſinum, lateri A B ſinum oppoſiti anguli C, lateri C B ſinum anguli oppoſiti A. Eadem erit laterum proportio, quæ ſinuum.

Demonſtratio patet ex defin. 6. cap. 2. Itaque ſi cupiam ſcire, quanto latus unum ſit altero majus ex. gr. BC quàm A C: ſinum 10000000 divide per ſinum 5150381. Quotiens $1\frac{4849619}{10000000}$ hoc indicabit; ſicut enim quotiens eſt ad 1, ita AC eſt ad BC.

Vel alterutri lateri circa rectum, puta BC, cui adſcribe ſinum totum, lateri B A tangentem acuti C, baſi A C ſecantem ejuſdem anguli C. Ita patebit laterum proportio, ut patet ex definit. 9. cap. 2.

Problema II.

Fig. 16. D*Atis baſi (BC pedum* 100), *& acuto uno (B grad.* 59) *reliqua latera (AC, AB) invenire.*

IN triangulo rectangulo hypotenuſa, ſive baſis dicitur, quæ recto angulo opponitur, latera verò, quæ rectum angulum continent.

Inven-

Inventio lateris AC.

Ut data baſis BC, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	latus A C, prout eſt ſinus anguli B grad. 59. 8571673
ita eadem baſis BC, prout eſt pedum 100.	ad	ejuſdem lateris A C pedes quæſitos.....

In quo analogiſmo, quia tres primi termini ſunt noti, etiam quartus incognitus, numerus nempe pedum lateri A C debitorum innoteſcet per regulam proportionum multiplicando videlicet ſecundum 8571673 per tertium 100, & productum 857167300 dividendo per primum 10000000, quotiens enim $85\frac{7167300}{10000000}$ ex ea diviſione proveniens, eſt quartus, qui latebat, numerus pedum ſcilicet, quos continet latus quæſitum A C.

Non aſſimilis inventio lateris A B. Nam quia datur acutus B grad. 59. etiam per 32 lib. 1. ſeu annotat. 11 datur acutus alter C grad. 31; unde etiam ſinus utriuſq; dantur. Jam

Ut baſis B C, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	latus ignotum A B, prout eſt ſinus ang. gr. 31. 5150381,
ita baſis B C, prout eſt pedum 100.	ad	lateris ignoti A B pedes quæſitos.....

Cùm ergo tria prima ſint nota, etiam quartum, numerus videlicet pedum lateri A B debitorum per regulam trium innoteſcet.

Demonſtratio.

HOc unum tùm hìc, tùm ferè etiam in ſequentibus erit demonſtrandum, quatuor ſupradictos terminos eſſe proportionales. Id verò ex definitione 6.cap.2. manifeſtum eſt. Nam baſis BC, latus nempe recto angulo A oppoſitum eſt ſinus totus, ſeu radius, latus verò AC eſt ſinus anguli oppoſiti B ex. gr. 59. grad. qui ex tabulis datur 8571673. Igitur quarum partium ſinus totus, nempe baſis BC eſt 10000000. earum ſinus anguli B, nempe latus AC eſt 8571673; ac proinde ut baſis BC prout eſt ſinus totus 10000000 eſt ad AC 8571673 ſinum anguli B, ita eadem baſis BC ex hyp. 100 pedes ad idem latus AC quæſitum, ſive ad numerum pedum in latere AC contentorum. Quod erat demonſtrandum.

Pari modo per defin. 6 BC eſt ſinus totus 10000000, & AB ſinus anguli C 31 grad. qui ex tabulis datur 5150381. Ergo ut BC ſinus totus 10000000 ad BA ſinum 5150381, ita eadem BC ex hyp. pedes 100. ad eandem BA incognito pedum numero conſtantem. Quod erat demonſtrandum.

N O T A.

Fundamentum hujus, & omnium ſequentium operationum, ac demonſtrationum eſt, quod quando duæ quantitates A, & Z notæ ſunt ſecundum quamvis earum menſuram, & una earum A etiam nota eſt in alia menſura ex. gr. in pedibus, tum etiam altera Z in pedibus neceſſariò innoteſcet per regulam auream, vide cap. 1. lib. 4. Arithm. noſtræ, ubi id demonſtratum eſt.

Pro-

Problema III.

Datis latere uno (AC milliariorum 1000*), & acuto uno latus reliquum (BA), & baſim (BC) invenire.* Fig. 17.

Ex uno acuto dato notus fiat alter : ut ſi B *detur grad.* 54. *bis ſubductis à* 90. *erit C gr.* 36.

Inventio lateris AB.

Ut latus datum AC, ad prout eſt ſinus totus 10000000	latus ignotum AB, prout eſt anguli C dato lateri adjacentis tangens 7265426
ita latus datum AC, ad prout eſt milliariorum 1000	lateris ignoti AB milliaria quæſita.

Inventio baſis BC.

Ut latus datum AC, ad prout eſt ſinus totus 10000000	baſim ignotam BC, prout eſt acuti C dato lateri adjacentis ſecans 12360680
ita latus datum AC, ad prout eſt milliariorum 1000	ignotæ BC baſeos milliaria quæſita.

Quare cùm in utroque analogiſmo tria prima ſint cognita, etiam quartum utrobique per regulam proportionum innoteſcet: eritque latus AB milliariorum $726\frac{5426}{10000}$ baſis verò BC milliariorum $123\frac{6068}{10000}$.

Demonſtratio.

PEr defin. 9. cap. 2. latus AB eſt tangens anguli C grad. 36, quæ ex tabulis datur 7265426, latus verò AC eſt ſinus totus 10000000, hoc eſt, quarum partium latus AC eſt 10000000, earum eſt AB latus 7265426. Ergo ut AC 10000000. eſt ad AB 7265426, ita eadem AC ex hyp. 1000 milliar. ad milliaria quæſiti lateris AB, hoc eſt ad numerum milliariorum in AB contentorum, ergo &c.

Pari modo per defin. 9. cap. 2. reſpectu anguli C grad. 36 AC eſt ſinus totus 10000000 & BC ſecans, quę ex tabulis datur 12360680. Ergo ut AC ſinus totus 10000000 eſt ad BC ſecantem 12360680, ita eadem AC ex hyp. 100 milliarium ad eandem BC ignotum numerum milliariorum continentem, ergo &c.

Problema IV.

Fig. 18. B*aſi* (CB 1000 *perticarum*) *&* *uno latere*(*AC* 891 *perticarum*) *datis, invenire acutos angulos, & latus alterum* (*A* B.)

Ut baſis data CB perticarum 1000	ad	latus datum AC perticarum 891
ita baſis eadem CB, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	anguli ignoti B, qui dato lateri AC opponitur, ſinum.

Qui proinde per regulam proportionum reperitur 8610000; huic in tabula invenitur proximè æqualis 8910065, cui adſcriptus eſt angulus gr. 63, qui per probl. 9. cap. 2. adhuc reperitur exactiùs 15. ergo eſt angulus B, qui latebat, invento

to autem acuto B datur etiam acutus alter C grad. 27.

Quoniam verò jam in triangulo rectangulo nota eſt baſis C B cum angulo C, latus quęſitum B A invenietur per probl. 2.

Idem latus independenter ab angulis reperitur per probl. 3. in Scholio prop. 47. lib. 1. elem.

Demonſtratio.

Per defin. 6. cap. 2. CB eſt ſinus totus 10000000, & C A eſt ſinus anguli B. ergò ut baſis BC 1000 pertic. ad latus A C 891 pertic. ita baſis eadem BC prout eſt ſinus totus 10000000 ad idem latus AC prout eſt ſinus ignoti anguli B.

Aliter.

Ut latus C A datum pertic. 891	ad	baſim CB pertic. 1000
ita ſinus totus 10000000	ad	ſecantem ignoti ang. C datis CB, CA comprehenſi.

Demonſtratio eadem, ſed eſt defin. 9. cap. 2.

Problema V.

Fig. 19.

Duobus lateribus datis (B A pedum 79, C A pedum 100) acutos angulos, & baſim invenire.

Inveniendus ſit angulus acutus C.

Ut datum latus A C adjacens quæſito ang. C	ad	alterum latus datum A B.
ita ſinus totus 10000000	ad	anguli quæſiti C tangentem.

Quæ per regulam prop. reperitur 7900000; huic proximè ęqualis invenitur in tabula 6156615, cui adſcriptum reperies angulum 38 graduum, qui probl. 9. cap. 2. adhuc reperietur exactiùs. Tantus ergo eſt acutus C, qui latebat, quo ex grad. 90 ſubtracto datur & alter B grad. 52, quia verò noti jam ſunt acuti anguli, & ex hyp. etiam latera per probl. 2. etiam baſis B C fiet nota.

Alia baſis inventio ab angulis independens traditur probl. 2. Scholii prop. 47. lib. 1. elem.

Demonſtratio.

Per defin. 9. cap. 2. reſpectu anguli C ſinus totus eſt CA, tangens BA. Ergo ut CA ex hyp. pedum 100 ad BA ex hyp. pedum 79. ita eadem CA, prout eſt ſinus totus 10000000 ad eandem BA, ut eſt tangens quæſiti anguli C.

ANALYSIS TRIANGULI OBLIQUANGULI.

TRiangulum, in quo nullus angulus rectus eſt, obliquangulum voco.

Problema VI.

Fig. 20. 21. *DAtis omnibus lateribus lateris ſegmenta (BF, CF) facta à perpendiculari (AF) ex oppoſito angulo ducta, & ipſam perpendicularem invenire.*

Centro A intervallo lateris minoris AB deſcribatur circulus ſecans reliqua latera in O, & Q, & producatur CA in L: manifeſtum eſt LC eſſe ſummam laterum AC, AB; & OC differentiam eorundem; item patet ex prop. 3. lib. 3. BQ biſectam eſſe in F. His ita conſtitutis rectangula BCQ,

BCQ, & LCO *a* æqualia ſunt. Ergo per 14. vel 16. lib. 6. *a Coroll. 1. prop. 36. l. 3.*

Ut BC latus, in quod perpendicularis cadit.	ad LC ſummam laterum reliquorum BA, AC
ita OC differentia reliquorum laterum.	ad rectam CQ.

Quare cùm tria prima ſint nota, etiam quartum nempe CQ innoteſcet, hæc, ſi perpendicularis intra triangulum cadit, (ut in fig. 20) ablata à latere noto BC notam relinquet BQ, cujus ſemiſſis BF eſt ſegmentum quæſitum minus, quo ſubtracto à latere BC, etiam majus ſegmentum CF innoteſcet.

Quòd ſi perpendicularis cadat extrà (ut in Fig. 21) tunc ex quarta proportionali CQ ſubtrahe latus BC, ut innoteſcat reſiduum BQ, hujus enim ſemiſſis BF dabit ſegmentum minus ad quod adjecto latere BC habetur ſegmentum majus CF.

Ipſa verò perpendicularis AF fiet nota, ſi ex quadrato lateris BA adjacentis minori ſegmento ſubtrahatur quadratum minoris ſegmenti BF, & ex reſiduo extrahatur radix, ea enim erit AF, patet ex p. 47. lib. 1.

Porrò ipſa quarta proportionalis CQ indicat quando perpendicularis intra triangulum cadat, quando extra; cùm enim minor eſt latere dato BC, in quod incidit perpendicularis, ea cadet intra triangulum, cùm major extra.

Hoc problema, quod ſanè proinde pulchrum, atque utile eſt, expeditur etiam per prop. 13. & 12. lib. 2. ut tradidi in ſcholio ibidem; ſed modus hìc traditus aliquantò facilior eſt.

Problema VII.

Fig. 22. 23. **D***Atis omnibus angulis, laterum proportionem invenire.*

In quovis triangulo eadem eſt inter latera proportio, quæ inter ſinus angulorum lateribus oppoſitorum.

Demonſtratio.

Eſto triangulum obliquangulum ABC latera habens inæqualia (aliàs enim res per ſe eſſet manifeſta) & ex majori CB abſcindatur CI æqualis minori AB, ducanturque IL, BF ad AC perpendiculares, quæ quia ſunt inter ſe parallelæ, erit *a* CI (hoc eſt AB) ad CB, ut IL ad BF. Sed poſito ſinu toto CI eſt IL ſinus *b* anguli C, & poſito ſinu toto AB, (hoc eſt eodem, quo antè, cum AB, CI æquales ſint) BF eſt *c* ſinus anguli BAC, ergo latus AB eſt ad latus CB, ut ſinus anguli C ad ſinum anguli BAC, eadem erit in reliquorum comparatione laterum demonſtratio.

a Per Cor. 1 p. 4. lib. 6. *b* Per def. cap. 1. *c* Per eand.

Tantùm nota. Cùm perpendicularis BF extra triangulum cadit, eam nihilominus eſſe ſinum anguli BAC, quia *d* ſinus eſt anguli BAF, cum quo *e* eundem habet ſinum angulus BAC, ejus complementum ad duos rectos.

d Per eand. *e* Per def.

Problema VIII.

Fig. 24. **D***Atis omnibus lateribus, angulos invenire.*

Concipiatur in aliquod latus ex oppoſito angulo demiſſa perpendicularis AF, & per probl. 6 nota fiant ſegmenta BF, CF.

Tùm

Tùm, quia in triangulo rectangulo B F A dantur B A, B F, per probl. 4. ſimiliter innoteſcet angulus B. Rursùm, quia in triangulo rectangulo C F A dantur C A, C F, per probl. 4. ſimiliter innoteſcet angulus C, & per prop. 32. lib. 1. ſeu annot. 9. etiam tertius B A C.

Problema IX.

Dato latere (AC), & duobus angulis, reliqua latera (AB, CB) invenire. Fig. 25.

Per Problema 7.

Ut anguli B, qui dato lateri AC opponitur, ſinus 6293204.	ad	anguli C oppoſiti quæſito lateri AB ſinum 2756374.
ita latus datum AC 1000 paſſuum	ad	lateris quæſiti AB paſſus....

Rursùs per Problema 7.

Ut anguli B dato lateri AC oppoſiti ſinus 6293204	ad	anguli A oppoſiti quæſito lateri CB ſinum 8195521
ita latus datum AC 1000 paſſuum	ad	lateris quæſiti CB, paſſus:

In utroque analogiſmo tria prima nota ſunt, quartum igitur utrobique, nimirùm latera AB, CB innoteſcent per regulam proportionum.

Problema X.

Datis duobus lateribus (CA ped. 216, BA ped. 112) & angulo (Agr. 113) iis cōprehenſo, reliquos an- Fig. 26.

angulos (*C*, *B*), *& latus reliquum* (*C B*) *invenire*.

Quoniam C A, BA latera dantur, etiam datur eorum ſumma 328 ped. & eorundem differentia ped. 104. Rursùm, quia datur angulus A grad. 113, datur & reliquorum ignotorum C, B ſumma (67 grad.) adeoque & ſemiſſis ſummæ (grad. 33, 30.) cujus proinde tangens 6618856 datur ex tabulis: his poſitis

Ut lat. datorum C A, B A ſumma 328. ped.	ad	laterum CA, BA differentiam 104. ped.
ita tang. 6618856 ſemiſſeos ſummæ incognitorum ang.	ad	tangentem.... ſemiſſeos differ. ignotorum ang. C B

Cùm ergo tria prima ſint nota, per reg. prop. innoteſcet quartum, nempe tangens ſemiſſeos differentiæ angulorum ignotorum C, B... huic in columna tangentium proximè reperitur æqualis..., cui adſcripti ſunt grad..... pro angulo ſemiſſeos differentiæ angulorum C, B, quam ſi addas ad ſemiſſem ſummæ grad. 33, 30, angulorum C, B, habetur B major quæſitus. Si ſubtrahas proveniet minor C: latus reliquum CB reperitur per præced. jam enim præter latus, dantur & anguli.

Demonſtratio

Analogiſmi ſuprà poſiti eſt ejuſmodi: fiant *Fig.* 27. 26. anguli HPF, FPG æquales angulis ignotis B, C: centro P deſcripto circulo, qui latera angulorum ſecet in H, F, G, ducantur ad FP perpendiculares HR, GL, quæ per defin. 1, & 6, & 5 erunt ſinus angulorum HPF, FPG, poſito ſinu toto, ſeu radio PH, PG, ducatur deinde re-

&a

ſta H O G, & fiat H X par ipſi G O jungaturque P X, erit X O differentia ipſarum H O, H X, hoc eſt ipſarum H O, O G, denique ex centro P ducatur ad H G perpendicularis P Q, *a* quæ biſecabit H G, quoniam igitur æquales ſunt H Q, G Q; & H X, G O, etiam X Q, O Q æquales erunt. Unde Q O eſt ſemiſſis differentiæ X O rectarum H O, O G, ex quo facilè etiam oſtenditur, angulum H P Q eſſe ſemiſſem ſummæ angulorum HPO, OPG, hoc eſt *b* angulorum B, C: & Q P O eſſe ſemiſſem differentiæ angulorum HPO, O P G; hoc eſt B, C: his poſitis differentia laterum C A, A B eſto Z. *a Per 3.l.3.* *b Per conſtr.*

Quia HR eſt ſinus anguli H P F, hoc eſt B, & GL ſinus anguli FPG, hoc eſt C, erit latus *c* CA ad latus BA ut HR ſinus anguli B ad GL ſinum anguli C, hoc *d* eſt (quia æquiangula ſunt triangula HRO, GLO) ut HO ad OG. Ergo CA *e* eſt ad Z differentiam laterum CA, BA, ut HO ad ipſarum H O, OG differentiam X O; & invertendo laterum differentia Z eſt ad C A, ut differentia X O ad HO, atqui (ut jam oſtendi) C A eſt ad B A, ut H O ad O G, igitur *f* ex æquo Z differentia laterum eſt ad B A, ut X O differentia ad O G. Ergo invertendo BA eſt ad Z, ut OG ad X O; quoniam ergo (ut oſtenſum ſuprà) CA eſt ad AB, ut HO ad OG, ac proinde *g* componendo ſumma CA, AB eſt ad AB, ut HG ad OG; AB verò (ut jam oſtendi) ſit ad Z, ut OG ad XO, ex æquo *h* erit ſumma laterum CA, AB ad Z laterum differentiam, ut HG ad XO. Sed ut HG ad XO, ſic ſemiſſis HG nempe HQ, quæ *i* tangens eſt anguli HPQ, ad ſemiſſem XO, nempe QO tangentem *k* anguli QPO. Ergo ſumma laterum C A, AB, eſt ad Z differentiam laterum, ut HQ tangens *c Per Probl. 7.* *d Per 4.l.6.* *e Per cor. 2 p. 18. l. 5.* *f Per 22.l. 5.* *g Per 18.l. 5.* *h Per 22.l. 5.* *i Per Def. 9.* *k ibidem.*

gens anguli HPQ (qui, ut oſtendi ſuprà, eſt ſemiſſis ſummæ angulorum B C) ad Q O tangentem anguli QPO, qui eſt ſemiſſis differentiæ angulorum B, C. Quod erat demonſtrandum.

Alia Problematis ſolutio.

Fig. 28. 29. Ex alterutro angulo incognito; ex. gr. ex B in latus oppoſitum ducta concipiatur perpendicularis BF.

In triangulo rectangulo BFA, cùm detur baſis BA, & acutus angulus B A F, per prob. 2 invenientur BF, & AF, qua ſubtracta ex data C A in Fig. 28. addita verò ad CA in Fig. 29. nota fiet etiam C F.

Rurſùm ergo in trigono rectangulo CFB cùm dentur duo latera BF, CF per probl. 5. innoteſcet BC latus quæſitum, & angulus C, quem unà cum dato A ſubtrahe à 180 grad. remanebit B alter quæſitorum.

Problema XI.

Fig. 30. 1. *Datis duobus lateribus AB, CB, & angulo uno C iis non comprehenſo, reliquos angulos, & latus reliquum AC invenire.*

Per Problema VII.

Ut AB latus datum dato angulo C oppoſitum	ad	alterum latus datum CB.
ita ſinus anguli dati C.	ad	ſinum ignoti anguli A, qui alteri lateri dato CB opponitur.

Quare cùm tria prima ſint nota, etiam quartum, nempe ſinus anguli ignoti A, innoteſcet, & per ſinum

num invenietur in tabulis angulus ipſe A, ſi acutus ſit; ſi verò A obtuſus, tunc angulus per ſinum inventus ſubtractus à 180 gradibus relinquet quęſitum A. Ratio patet ex defin. 5.

Neceſſe igitur hìc eſt ad inventionem anguli, ut ejus ſpecies aliundè nota ſit.

Inventis angulis, latus ignotum AC innoteſcet per Probl. 9.

Aliter.

Ex angulo B datis lateribus comprehenſa ducta intelligatur BF perdendicularis ad latus ignotum AC. *Fig.* 32. 33.

In triangulo rectangulo BFC, cùm detur baſis BC, & unus acutus C, innoteſcent per Problema ſecundum CF, & BF. Rursùs in trigono rectangulo BFA cùm dentur baſis AB, & latus BF, innoteſcent per Problema quartum angulus BAF, & latus FA.

Quòd ſi angulus ignotus BAC, qui datis lateribus AB, CA comprehenditur, ſit acutus, ac proinde perpendicularis BF, ut in Fig. 32. intra triangulum cadat, angulus BAF jam inventus eſt ipſe BAC quæſitus, & tunc FA jam nota addenda eſt ad CF antè repertam, ut innoteſcat totum latus quæſitum AC. *Fig.* 32.

Si verò BAC ſit obtuſus, adeoque perpendicularis BF, ut in Fig. 33. extra tiangulum cadat, angulus inventus BAF ſubtrahendus eſt à 180 gradibus, ut innoteſcat quæſitus BAC: & tunc FA jam nota demenda ex nota FC, ut innoteſcat latus quæſitum AC. *Fig.* 33.

Rurſùm igitur ad inventionem anguli BAC, & lateris AC neceſſe eſt, ut aliundè anguli BAC nota ſit ſpecies.

DE

DE DIMENSIONE
TRIANGULORUM SPHÆRICORUM
Ex encyclopædia P. Gaſparis Schotti E Societate Jeſu.

DE ELEMENTIS SPHÆRICIS.
§. I.

ELementa ſphærica appello, quæ neceſſaria ſunt tùm ad trigonometriam ſphæricam, tùm ad univerſam ſphęricam ſcientiam intelligendam, cujuſmodi ſunt ſuppoſitiones nonnullæ, & definitiones.

Quæ ſequuntur, voco ſuppoſitiones, non quòd nulla demonſtratione egeant, ſed quòd demonſtrata ſumantur à Theodoſio, & aliis.

SUPPOSITIONES.

I.

Thed. l. 1. ſphær. def. 1. 2. 3. 4.

SPhæra eſt figura ſolida comprehenſa unica ſuperficie convexa, ad quam ab uno eorum punctorum, quæ intra figuram ſunt, omnes rectæ lineæ ductæ ſunt inter ſe æquales. Centrum ſphæræ eſt prędictum punctum. Axis ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ſphæræ ducta, & utrimque terminata in ſphæræ ſuperficie, circa quam quieſcentem circumvolvitur ſphæra.

Poli

Poli ſphæræ ſunt extrema puncta ipſius axis. *In appoſita figura (quam globoſam fingere oportet) centrum eſt E; axis AC, & BD; poli A, & C, B, & D. Meliùs intelligentur hæc, & ſequentia, ſi ante oculos habeatur globus materialis.* Fig. 36.

II.

Polus circuli in ſphæra deſcripti eſt punctum in ſuperficie ſphæræ, à quo omnes lineæ ad circuli circumferentiam tendentes rectà ſunt inter ſe æquales. *Circuli AFCG polus unus eſt B, alter D; circuli verò BFDG polus unus eſt A, alter C.* Idē.def.5. Fig. 36.

III.

Circuli ſphæræ aut ſunt maximi, aut non maximi: Maximi ſunt, qui dividunt ſphæram in duas æquales partes. Et hi habent idem centrum cum ſphæra. Ex quo ſequitur, circulos ſphæræ habentes idem cum ipſa centrum eſſe maximos. Non maximi ſunt, qui non dividunt ſphæram in duas partes æquales. Et hi non habent idem centrum cum ſphæra. Unde circuli non habentes idem cum ſphæra centrum, non ſunt maximi. *In figura circulus AFCG eſt maximus; HIKL verò non maximus. Prioris centrum eſt E, idem quod ſphæræ.* Thed. p. 6. l. 1. Fig. 36.

IV.

In ſphæra maximi circuli ſe mutuò ſecant bifariam: & è contrario in ſphæra circuli, qui ſe mutuò bifariam ſecant, ſunt maximi. *Duo circuli, ABCD, & AFCG ſecant ſe bifariam in A, & C.* Theod. l. 1 prop. 11. 12 Fig. 36.

V.

Omnes maximi circuli ejuſdem ſphæræ ſunt inter

ter ſe æquales, quia eorum diametri ſunt æqua-les, cùm omnes per idem centrum tranſeant, *ut patet in diametris AC*, B D.

Fig. 36.

VI.

Theod. prop. 13. l. 1. Si in ſphæra maximus circulus circulum quempiam ad rectos angulos ſecet, & bifariam eum ſecat, & per polos ipſius tranſit. Ad rectos angulos (ſcilicet ſphæricos) ſecare ſe dicuntur, quando unus tranſit per polos alterius, & conſequenter non inclinat magis ad unam ejus partem, quàm ad alteram. *Sic A F C G ſecat circulum A B C D ad angulos rectos in punctis A, & C. Sic etiam B F D G ſecat circulum A B C D ad angulos rectos in B, & D. Utrobique autem bifariam ſe mutuò ſecant.*

Fig. 36.

VII.

Idem prop. 15. l. 1. Si in ſphæra maximus circulus eorum, qui in ſphęra ſunt circulorum, aliquem per polos ſecet, bifariam, & ad angulos rectos eum ſecat. *Explicatio patet ex proximè dictis.*

VIII.

Vide Theor. 1. additum ad prop. 15. l. 1. Theod. apud Clau. Fig. 36. Si in ſphæra maximus circulus per polos alterius cujuſpiam maximi circuli tranſeat, tranſibit viciſſim hic per polos illius. *Sic circulus maximus ABC D tranſit per polos B, & D circuli maximi AF C D, & hic viciſſim per polos A, & C alterius.*

IX.

Vide Theor. 2. ibid. Si in ſphæra circulus circulum per polos ſecet, circulus maximus eſt, & bifariam eum ſecat, & ad angulos rectos. *Sic quia circulus ABCD ſecat tam H I K L, quàm A F C G per polos ipſorum B, & D, ſignum eſt eſſe maximum circulum, & utrumque bifariam ſecat, & ad angulos rectos ad H, & K, item ad A, & C.*

Fig. 36.

Si

X.

Si in ſphæra circulus circulum bifariam, & ad angulos rectos ſecat, circulus maximus eſt, & per polos eum ſecat. *Explicatio patet ex proximè dictis.* *Ibidem Theor. 3.*

XI.

Omnis circulus maximus diſtat undique per quadrantem maximi circuli à ſuo polo, ideoque omnis quadrans à polo maximi circuli in ipſum ductus eſt ei ad angulos rectos. *Sic A F C G diſtat à ſuis polis B, & D per quadrantes A B, C B, A D, C D &c.* *Per coroll. prop. 16. l. 1. Theod. Fig. 36.*

XII.

Si duo, aut plures maximi circuli maximum circulum ad rectos ſecent angulos, concurſus ipſorum erit ipſiuſmet circuli polus. *Patet ex globo materiali, ſi in illo deſcribantur plures circuli maximi ſecantes alium maximum perpendiculariter.*

DEFINITIONES.

Angulus ſphæricus eſt, quem in ſphæræ ſuperficie duo arcus circulorum maximorum ſeſe mutuò ſecantes continent. *Tales ſunt anguli A E C, C E B &c.* *Dixi*, arcus circulorum maximorum, *quia anguli ab aliis ſphæræ circulis effecti in ſuperficie ſphæræ à Trigonometris non conſiderantur. Dixi prætereà*, ſeſe mutuò ſecantes, *quia omnes circuli maximi in ſphæra ſe mutuò ſecant, & nunquam ſe mutuò tangunt*, per Suppoſit. 4. *Clavius l. de Triang. Sphæricor. defi. 1. Fig. 37.*

II.

Idē def. 2. Angulus ſphæricus rectus eſt, quem in ſphæræ ſuperficie duo arcus circulorum maximorum ieſe ad angulos rectos ſecantium continent. *Tunc autem duo circuli ſecant ſe ad angulos rectos, quando unus ad alterum rectus eſt, hoc eſt, quando unus ſecans alterum non inclinat magis ad unam partem, quàm ad alteram, ut ſuprà dicebam Suppoſit. 6.*

III.

Idē def. 3. Angulus ſphæricus obtuſus eſt, qui recto major eſt; acutus verò, qui minor eſt recto. *Explicatione non eget.*

Vide Clau. l.de triāg. ſphæricæ. prop. 10. *Conſtituitur angulus ſphæricus ad punctum datum in dato arcu circuli maximi in ſuperficie ſphæræ, ſi per illud punctum, & per polum dati arcus deſcribatur circulus maximus; hujus enim circuli circumferentia cum arcu dato angulum rectum conſtituet, cùm circulus hic ad circulum illius arcus ſit rectus* per Suppoſit. 7. &

Fig. 37. 9. *Sic ſi arcus A D B ſit circuli maximi arcus, & polus ejus ſit E; ſi ex puncto A per E ducatur circulus maximus A E B &c, erit angulus A rectus. Si per datum punctum deſcribatur arcus circuli maximi non per polos dati arcus, conſtituet circumferentia hujus circuli cum dato arcu angulos inæquales, obtuſum unum, alterum acutum. Sic circuli maximi arcus F H G cum circuli maximi arcu A D B ad punctum F conſtituit angulum A F H obtuſum, & H F D acutum.*

IV.

IV.

Æquales ſphærales anguli ſunt, qui ſub arcubus circulorum ad æquales angulos inclinatorum continentur.

V.

Triangulum ſphæricum eſt, quod tribus arcubus circulorum maximorum ſphæræ ſuperficie continetur. *Itaque latera trianguli ſphærici ſunt arcus maximorum circulorum ſingulatim ſemicirculo minores. Triangulum ſphæricum eſt vel æquilaterum, ſi nimirùm omnes tres arcus fuerint æquales: vel iſoſceles, ſi duo tantùm arcus fuerint æquales: vel ſcalenum, ſi omnes inæquales inter ſe fuerint. Item vel rectangulum eſt, ſi nimirùm aliquem angulum habuerit rectum: vel obtuſangulum, ſi aliquem obtuſum habuerit: vel acutangulum, ſi omnes acuti fuerint. In rectangulo, & obtuſangulo triangulo ſphærico, ſi unus angulus eſt rectus, vel obtuſus, poſſunt alii duo etiam eſſe recti, vel obtuſi, vel alter ſaltem, quod in rectilineis non contingit.* *Idē def.*

VI.

Arcus anguli ſphærici eſt arcus circuli maximi, cujus polus eſt in ipſo angulo inter duos arcus angulum ſphæricum comprehendentes interceptus. *Sic arcus anguli AEC eſt AC &c; non omnis ergo arcus angulo ſphærico oppoſitus eſt illius anguli arcus. Quia verò polus circuli maximi abeſt ab eo quadrante circuli maximi, fit ut uterque arcuum angulum comprehendentium inter angulum, & anguli poſitorum ſit quadrans. Quare ſi angulus fuerit rectus, arcus anguli erit quadrans: ſi acutus, quadrante minor; ſi obtuſus, major quadrante.* *Clav. def. 6.* *Fig. 37.*

VII.

Clav. def. 7. Complementum arcus eſt exceſſus, quo quadrans eum ſuperat, ſi arcus minor eſt quadrante: vel ab eo ſuperatur, ſi eſt quadrante major.

VIII.

Clav. def. 8. Complementum anguli ſphærici eſt exceſſus, quo quadrans arcum ipſius anguli ſuperat, vel ab eo ſuperatur.

IX.

Clav. def. 9. Sinus, Tangens, & Secans anguli ſphærici eſt ſinus, tangens, & ſecans illius arcus, qui arcus anguli dicitur.

§. II.

DE PROPRIETATIBUS angulorum, & triangulorum ſphæricorum.

I.

SI anguli ſphærici crura, ſive latera continuantur, concurrunt, & ſemicirculos efficiunt. *Fig.* 34. *Sic anguli* B A C *crura* A B, A C *continuata concurrunt in* D, *&* *efficiunt ſemicirculos* A B D, A C D. *Ratio eſt, quia* per 1 Definit. *duo arcus* B A, *&* C A *ſunt arcus maximorum circulorum ſeſe mutuò ſecantes*; per 4. verò ſuppoſit. *in ſphæra maximi circuli ſe mutuò bifariam ſecant.*

II.

II.

Si anguli ſphærici crura continuata concurrunt, & ſemicirculos efficiunt, fiunt duo anguli oppoſiti inter ſe æquales. *Tales ſunt anguli BAC, BDC. Ratio eſt, quia habent candem menſuram, nempe arcum GH* juxta Definit. 6. *Clavius l. de triang. ſph. prop. 13. Fig. 34.*

III.

Cùm arcus circuli maximi in ſphæra ſuper arcum circuli maximi conſiſtens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit: *Sic arcus circuli maximi IG conſiſtens ſuper arcum AGD facit duos angulos AGI, DGI. Si igitur circulus arcus IG tranſit per polum circuli arcus AGD, ſecetur hic ab illo ad angulos rectos* per 11. Suppoſit. *ſi non per polum tranſit, ſit unus angulus obtuſus, alter acutus, æquivalentes tamen duobus rectis.* *Clav. ibid. prop. 5. Fig. 34.*

IV.

Iſoſcelium triangulorum ſphæricorum duo anguli ſupra baſim ſunt æquales, & productis æqualibus arcubus etiam anguli infra baſim fiunt æquales. Hinc ſequitur, omne triangulum ſphæricum æquiangulum eſſe etiam æquilaterum. *Clav. ibid. prop. 8.*

V.

Si trianguli ſphærici duo anguli ſunt inter ſe æquales, etiam latera ſub æqualibus angulis ſubtenſa ſunt inter ſe æqualia. Hinc ſequitur, omne triangulum ſphæricum æquiangulum eſſe etiam æquilaterum. *Clav. prop. 9.*

VI.

Clau. in cor. prop. 25. Æquilateri trianguli ſphærici ſingula latera poſſunt eſſe quadrantes maximorum circulorum, & ſingula quadrantibus vel majora, vel minora. Quando ſingula ſunt quadrantes, omnes anguli ſunt recti: quando majora quadrantibus, omnes ſunt obtuſi: quando minora, acuti. E contrario, quando in triangulo ſphærico æquiangulo ſinguli anguli ſunt recti, ſingula latera ſunt quadrantes: quando obtuſi, majora ſunt quadrante: quando acuti, minora.

VII.

Clau. prop. 25. Iſoſcelis trianguli ſphærici æqualia duo latera poſſunt eſſe quadrantes, & majora, aut minora quadrantibus. Quando ſunt quadrantes, anguli ſunt recti: quando majora, obtuſi: quando minora, acuti. E contrario, quando duo anguli æquales ſupra baſim ſunt recti, latera æqualia ſunt quadrantes: quando obtuſi, majora ſunt quadrante: quando acuti, minora.

VIII.

Clau. prop. 26. In omni triangulo ſphærico iſoſcele, cujus duo latera æqualia ſunt quadrantes, ſi angulus ſub ipſis comprehenſus eſt rectus, baſis eſt quadrans: ſi acutus, quadrante minor: ſi obtuſus, major. Et viciſſim, ſi baſis eſt quadrans, angulus oppoſitus eſt rectus: ſi major quadrante, obtuſus: ſi minor, acutus. Semper autem polus baſis eſt in angulo ſub lateribus comprehenſo.

IX.

IX.

In omni triangulo ſphærico, cujus omnes arcus ſunt quadrante majores, vel unus quadrans, & reliqui duo quandrante majores, omnes tres anguli ſunt obtuſi. *Clau. prop.* 27.

X.

In omni triangulo ſphærico rectangulo, cujus omnes arcus ſunt quadrante minores, reliqui duo anguli ſunt acuti. Et ſi reliqui duo ſunt acuti, erunt ſinguli arcus quadrante minores. *Clau. prop.* 28.

XI.

In omni triangulo ſphærico, cujus omnes anguli ſunt acuti, arcus ſinguli ſunt quadrante minores. *Clau. prop.* 29.

XII.

In omni triangulo ſphærico, cujus unus quidem arcus quadrante major ſit, reliquorum verò uterque quadrante minor, nullus angulorum rectus eſt. *Clau. prop.* 30.

XIII.

Fieri non poteſt, ut in triangulo ſphærico rectangulo unus tantùm arcus ſit quadrans. *Quare, qui concedit in triangulo unum quadrantem, concedere debet & alterum, & ſaltem duos angulos rectos.* *Clau. in cor. pro.* 38.

§. III.

DE DIMENSIONE
TRIANGULORUM

Sphæricorum rectangulorum, in quibus unus tantùm eſt rectus.

SI triangulum ſphæricum habet tres rectos, datis, ſeu cognitis illis, data ſunt etiam latera ipſorum, utpote quadrantes, & viciſſim *per 6. Propriet.* Si habet duos rectos, datis illis, dantur & latera rectis oppoſita, nempe duo quadrantes *per 6. Propriet.* Si datur etiam latus tertium, datur angulus tertius; & viciſſim, quia tunc latus tertium eſt menſura anguli *per 6. Defin.* In his igitur caſibus nulla trigonometria eſt opus, ſed ſolùm, quando triangulum habet unicum rectum, & reliquos obliquos, cujuſmodi eſt triangulum appoſitum rectangulum ad B. Sexdecim variationes in hoc caſu occurrere poſſunt, pro quibus ſexdecim regulas præſcribimus. In omnibus nomine baſis intelligimus arcum recto angulo oppoſitum, ut hìc arcum A C.

Fig. 35.

Pro-

Propoſitio I. Problema.

Angulum ex baſe, & latere, quod angulo quæſito opponitur, invenire.

IN præcedenti triangulo ſit data baſis AC. 60°. & latus AB 20°, ſitque inveniendus angulus C oppoſitus lateri dato. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum lateris AB dati, ita ſecans complementi baſis AC ad ſinum anguli C quæſiti. EXEMPLUM. Sinus totus eſt 10000000, ſinus lateris AB 20° eſt 3420202; ſecans complementi baſis AC 60°, eſt 11547005. Ducta ſecante prædicta per ſinum lateris AB, fit ſumma 39493089590100, qua diviſa per radium 10000000, provenit quotiens 3949308 $\frac{9595}{10000}$ pro ſinu anguli C, cui reſpondent 23°. 15′. 42″. *Juxta hanc normam etiam reliquæ operationes inſtitui debent. Brevitatis cauſa omitto exempla in ſequentibus.* *Fig. 35.*

Propoſitio II. Problema.

Angulum ex baſe, & latere, quod angulo quæſito adjacet, invenire.

IN præcedenti triangulo data baſis AC ſit 60°. 30′, latus BC 30°, ſitque inveniendus angulus C lateri dato adjacens. Fiat, ut radius ad tangentem lateris BC dati, ita tangens complementi baſis AC, ad ſinum complementi anguli C quæſiti. *Fig 35.*

Pro-

Propoſitio III. Poblema.

Angulum ex baſe, & altero angulo non recto invenire.

Fig. 35. BAſis A C ſit 60°, 30′, angulus A datus ſit 13°. 30′ & quæratur angulus C. Fiat, ut radius ad ſinum complementi baſis A C, ita tangens anguli A dati ad tangentem complementi anguli C quæſiti.

Propoſitio IV. Problema.

Angulum ex latere quæſito angulo oppoſito, & altero angulo non recto invenire.

Fig. 35. ANgulus inveſtigandus ſit C, latus datum A B, & angulus datus A. Fiat, ut radius ad ſinum anguli A dati, ita ſinus complementi lateris A B dati ad ſinum complementi anguli C quæſiti.

Propoſitio V. Problema.

Angulum ex latere quæſito angulo adjacente, & altero angulo non recto invenire.

Fig. 35. D*Ummodò conſtet, nùm angulus quæſitus ſit major recto, aut minor, vel an baſis, aut latus alterum non datum ſit quadrante majus, aut minus.* Angulus inveſtigandus ſit C, latus datum B C, angulus datus A. Fiat, ut radius ad ſecantem lateris dati, ita ſinus complementi anguli dati ad ſinum anguli quæſiti.

Pro-

Propoſitio VI. Poblema.

Angulum ex utroque latere circa angulum rectum invenire.

ANgulus inveſtigandus ſit C, latera data A B, & B C circa angulum rectum. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum lateris B C, cui angulus quęſitus adjacet, ita tangens complementi alterius lateris A B quæſito angulo oppoſiti ad tangentem complementi anguli C quæſiti. *Fig.* 35.

Propoſitio VII. Poblema.

Latus ex baſe, & altero latere invenire.

BAſis data ſit A C, latus datum B C, latus, quod inveſtigatur, A B. Fiat, ut ſinus totus ad ſecantem dati lateris B C, ita ſinus complementi baſis A C ad ſinum complementi lateris A B quæſiti. *Fig.* 35.

Propoſitio VIII. Problema.

Latus ex baſe, & angulo, qui lateri quæſito opponitur, invenire.

BAſis data ſit A C, angulus datus C, latus, quod quæritur, A B. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum baſis A B, ita ſinus anguli dati C ad ſinum lateris A B quæſiti. *Fig.* 35.

Pro-

Propoſitio IX. Problema.

Latus ex baſe, & angulo, qui lateri quæſito adjacet, invenire.

Fig. 35. BAſis data ſit AC, angulus datus A, latus, quod quæritur, AB. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum complementi anguli A dati, ita tangens baſis AC ad tangentem lateris AB quæſiti.

Propoſitio X. Problema.

Latus ex altero latere, & angulo, qui quæſito lateri adjacet, invenire.

Fig. 35. *DUmmodò conſtet, an quæſitum latus ſit quadrante majus, aut minus; vel an alter angulus non rectus ſit acutus, aut obtuſus; vel denique, an baſis ſit quadrante minor, vel major.* Latus quæſitum ſit AB, angulus datus A, latus datum BC. Fiat, ut radius ad tangentem complementi anguli A dati, ita tangens lateris BC dati ad ſinum lateris AB quæſiti.

Propoſitio XI. Problema.

Latus ex altero latere, & angulo, qui lateri quæſito opponitur, invenire.

LAtus quæſitum AB, latus datum BC, angulus datus C. Fiat, ut radius ad ſinum lateris BC dati, ita tangens anguli C dati ad tangentem lateris AB quæſiti.

Pro-

Propoſitio XII. Problema.

Latus ex utroque angulo non recto invenire.

Latus quæſitum A B, anguli dati A, & C. Fiat, ut ſinus totus ad ſecantem complementi anguli A, ita ſinus complementi anguli C ad ſinum complementi lateris A B quæſiti. *Fig. 35.*

Propoſitio XIII. Problema.

Baſim ex latere, & angulo ei adjacente invenire.

Baſis quæſita A C, angulus datus A, latus datum A B. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum complementi anguli A dati, ita tangens complementi lateris A B dati ad tangentem complementi baſis A C quæſitæ. *Fig. 35.*

Propoſitio XIV. Problema.

Baſim ex latere, & angulo ei oppoſito invenire.

Baſis quæſita A C, angulus datus A, latus datum B C. Fiat, ut ſinus totus ad ſecantem complementi anguli A dati, ita ſinus lateris B C dati ad ſinum baſis A C quæſitæ. *Fig. 35.*

Pro-

Propoſitio X V. Poblema.

Baſim ex utroque latere invenire.

Fig. 35. BAſis quæſita AC, latus unum datum AB, alterum BC. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum complementi lateris A B, ita ſinus complementi alterius lateris BC ad ſinum complementi baſis AC quæſitæ.

Propoſitio X V I. Poblema.

Baſim ex utroque angulo non recto invenire.

Fig. 35. BAſis quæſita AC, anguli dati A, & C, Fiat, ut ſinus totus ad tangentem complementi anguli A, ita tangens complementi alterius anguli C ad ſinum complementi baſis AC quæſitæ.

§. IV.

§. IV.

DE DIMENSIONE TRIANGULORUM

Sphæricorum obliquangulorum.

AD quatuordecim caſus reduci poſſunt cum P. *Joanne Baptiſta Ricciolo* omnia, ad quæ obliquangulorum triangulorum ſphæricorum dimenſiones pertinent, quæ totidem Problematibus cum eodem ſolvo, ut ſequitur.

Propoſitio XVII. Poblema.

Angulum ſpecie præcognitum ex datis duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito invenire.

ANgulus *ſpecie præcognitus dicitur, quando ſcitur utrumſit acutus, vel obtuſus.* Fiat, ut ſinus lateris oppoſiti angulo dato ad ſinum anguli dati, ita latus reliquum datum ad ſinum anguli quæſiti, ſi acutus eſt. Si obtuſus eſt, ſubtrahe angulum prædicto modo inventum à gradibus 180, eritque reſiduum angulus quæſitus.

Pro-

Propoſitio XVIII. Problema.

Angulum verticalem ex datis duobus lateribus ſingulatim quadrante minoribus, & angulo uni eorum oppoſito, & ſpecie anguli oppoſiti reliquo lateri invenire.

A*Ngulum verticalem appello, qui à datis lateribus comprehenditur*. Fiat, ut radius ad tangentem anguli dati, ita ſinus complementi lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi *anguli primò inventi*. Deinde fiat, ut tangens lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi reliqui lateris dati, ita ſinus complementi anguli primò inventi ad ſinum complementi *anguli ſecundò inventi*. Jam, ſi angulis datis lateribus oppoſitis ſunt ejuſdem ſpeciei, ſumma inventorum angulorum primi, & ſecundi erit angulus verticalis quæſitus; ſin minùs, differentia inventorum angulorum erit quęſitus angulus verticalis.

Propoſitio XIX. Problema.

Angulum utrumque ad baſim ex datis lateribus duobus ſimul ſemicirculo minoribus, & angulo verticali invenire.

FIat, ut ſinus complementi ſemiſummę laterum ad ſinum complementi ſemidifferentiæ eorundem, ita tangens complementi ſemianguli verticalis ad tangentem ſemiſummæ angulorum quęſitorum. Deinde fiat, ut ſinus ſemiſummæ laterum ad ſinum ſemidifferentiæ eorundem, ita tan-

tangens complementi ſemianguli verticali ad tangentem ſemidifferentiæ, addendæ ipſi ſemiſummæ angulorum, ut fiat angulus major, demendę, ut fiat angulus minor quæſitorum.

Propoſitio XX. Problema.

Angulum quemvis ad baſim ex datis lateribus duobus, quorum alterum ſaltem ſit quadrante minus, & angulo verticali acuto invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem anguli verticalis, ita tangens complementi lateris oppoſiti angulo quæſito ad tangentem complementi primi caſus. Deinde fiat, ut tangens complementi anguli verticalis, ad ſecantem complementi anguli primò inventi, ita ſinus differentiæ inter primum caſum, ac latus alterum ad tangentem complementi anguli quæſiti.

Propoſitio XXI. Problema.

Angulum tertium ex datis duobus angulis acutis, & latere oppoſito uni eorum, ac ſpecie lateris oppoſiti alteri angulo dato invenire.

Fiat, ut radius ad ſinum complementi lateris dati, ita tangens anguli adjacentis eidem lateri ad tangentem complementi primi anguli. Deinde fiat, ut ſinus complementi anguli adjacentis dato lateri ad ſinum complementi reliqui dati anguli, ita ſinus primi anguli ad ſinum ſecundi anguli ſpecie conformis lateri non dato. Jam, ſi latus datum eſt minus quadrante, ſumma primi, & ſecundi anguli inventi conflabit an-

bit angulum tertium quæſitum; ſi verò eſt majus quadrante, ſumma facta ex ſecundo angulo, & primi anguli complemento ſubtracta ex gradibus 180 eundem dabit.

Propoſitio XXII. Problema.

Angulum baſi oppoſitum ex datis duobus angulis, quorum unus ſaltem ſit acutus, & ex baſi iis adjacente, quæ ſit minor quadrante, invenire.

FIat, ut radius ad ſinum anguli datorum minoris, ita ſinus reliqui anguli dati ad inventum primum. Deinde fiat, ut radius ad inventum primum, ita ſinus verſus, baſis ad inventum ſecundum. Tertiò addatur inventus ſecundus ſinui verſo differentiæ inter utrumvis datorum angulorum, & reliqui ſupplementum ad gradus 180, & fiet ſinus verſus anguli verticalis quęſiti.

Propoſitio XXIII. Problema.

Angulum quemlibet tanquam verticalem ex datis tribus lateribus quærere.

FIat, ut radius ad ſecantem complementi lateris unius continentis angulum quæſitum, ita ſecans complementi lateris alterius eundem continentis ad inventum primum. Deinde fiat, ut radius ad inventum primum, ita differentia ſinuum verſorum anguli quæſiti.

Propoſitio XXVI. Problema.

Baſim ex duobus datis lateribus ſingulatim quadrante minoribus , & angulo uni eorum oppoſito , ac ſpecie anguli oppoſiti reliquo dato lateri invenire .

Fiat , ut radius ad ſecantem anguli dati , ita tangens complementi lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi primi arcus. Deinde fiat , ut ſinus complementi lateris adjacentis angulo dato , ad ſinum complementi reliqui lateris dati, ita ſinus complementi arcus primi ad arcum ſecundum addendum arcui primo , ſi anguli lateribus datis oppoſiti ſunt ejuſdem ſpeciei , ut habeatur baſis ; alioquin differentia inventorum arcuum dabit baſim.

Propoſitio XXV. Problema.

Baſim ex datis lateribus duobus , quorum ſaltem unum ſit quadrante minus , & ex dato angulo verticali acuto , invenire .

Fiat , ut radius ad ſinum lateris datorum minoris , ita ſinus reliqui lateris ad aliud ; invenietur arcus , qui vocetur primus . Deinde fiat, ut radius ad arcum primum , ita ſinus verſus anguli verticalis ad arcum ſecundum , quem adde ſinui verſo differentiæ laterum , & fiet ſinus verſus baſis quæſitæ.

Propoſitio XXVI. Problema.

Baſim adjacentem duobus angulis datis acutis ex iis, & ex latere vni eorum oppoſito, nec non ſpecie lateris oppoſiti alteri angulo invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem anguli adjacentis lateri dato, ita tangens complementi lateris dati ad tangentem primi arcus. Deinde fiat, ut tangens anguli adjacentis lateri dato ad tangentem complementi reliqui anguli dati, ita ſinus primi arcus ad ſinum ſecundi arcus ſpecie conformis lateri non dato. Jam ſi latus datum eſt minus quadrante, ſumma primi, & ſecundi arcus inventi conflabit baſim quæſitam. At ſi majus eſt quadrante, ſumma facta ex ſecundo arcu, & ex complemento primi arcus ad ſemicirculum conflabit illam.

Propoſitio XXVII. Problema.

Latus dato angulo oppoſitum, ſpecie tamen præcognitum, ex datis duobus angulis, & latere vni eorum oppoſito invenire.

Fiat, ut ſinus anguli oppoſiti dato lateri ad ſinum dati lateris, ita ſinus reliqui anguli dati ad ſinum lateris quæſiti quadrante minoris. At, ſi debeat eſſe majus quadrante, ſubtrahatur latus inventum à gradibus 180, & habebis latus quæſitum.

Propoſitio XXVIII. Problema.

Latus utrumque unico actu ex datis angulis duobus ſimul duos rectos non excedentibus, & ex baſe ipſis adjacente invenire.

Fiat, ut ſinus complementi ſemiſummæ angulorum datorum ad ſinum complementi ſemidifferentiæ eorundem, ita tangens ſemibaſis ad tangentem ſemiſummæ laterum. Deinde fiat, ut ſinus ſemiſummæ angulorum datorum ad ſinum ſemidifferentiæ eorundem, ita tangens ſemibaſis ad tangentem ſemidifferentiæ laterum addendæ ipſi ſemiſummę laterum, ut habeatur latus majus: demendæ, ut habeatur minus.

Propoſitio XXIX. Problema.

Latus utrumvis ex datis angulis duobus, quorum ſaltem unus ſit acutus, & ex baſi adjacente quæ ſit minor quadrante, invenire.

Fiat, ut radius ad tangentem anguli oppoſiti lateri quæſito, ita ſinus complementi baſis ad tangentem complementi primi inventi. Deinde fiat, ut tangens complementi baſis ad ſecantem primi inventi, ita ſinus complementi differentię inter primum inventum, & ſecundum datorum angulorum, ſi quęritur latus oppoſitum angulo acuto; vel ſinus complementi ſummę factę ex invento primo, & altero datorum angulorum, ſi quæritur latus oppoſitum angulo obtuſo ad tangentem complementi lateris quę-

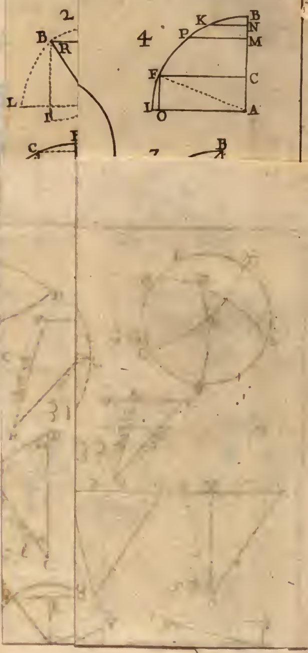
ſiti, ſi dicta ſumma, aut differentia non excedat grad. 90. vel complementi ad gradus 180. ſi excedat.

Propoſitio XXX. Problema.

Latus quodvis tanquam baſim ex datis tribus angulis invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem complementi alteriutrius angulorum quæſitæ baſi adjacentium, ita ſecans complementi reliqui dictorum angulorum ad arcum, qui vocetur inventum. Deinde fiat, ut radius ad arcum inventum, ita differentia duorum ſinuum verſorum (de qua mox) ad ſinum verſus baſis quæſitæ. Unus dictorum ſinuum verſorum ſit ſinus verſus anguli verticalis, alter autem ſinus verſus differentiæ, quæ eſt inter quemvis duorum angulorum adjacentium baſi, & inter alterius item baſi adjacentis ſupplementum ad gradus 180.

HEMĀ SPECTĀTIA



APPENDIX

Qua demonſtratur, ex falſo poſſe directè deduci verum.

IN theſibus Mathematicis, quas Lovanii ſeſqui abhinc anno Illuſtriſs. D. Theodorus D'Imerſelle Comes de Bouchove & S. Imperii magna ingenii commendatione, & auditorum plauſu publicè propugnavit, inter cæteras propoſui aſſertionem hujuſmodi: *ex falſis poſſe verum directè elici novis exemplis Geometricis confirmamus*. Hanc aſſertionem ſibi oppugnandam ſuſcepit vir Clariſſimus Daniel Lipſtorpius in appendice, quam operi ſuo pererudito, quod Specimina Philoſophiæ Carteſianæ inſcripſit, hac de cauſa adjunxit. Id verò ea modeſtia, & humanitate præſtitit, ut facilè appareat, hoc illi unum fuiſſe propoſitum, ut veritatem aſſequeretur. Ne autem videar doctiſſimi viri judicium parvi facere, hìc illi breviter reſpondebo, & appendici appendicem reponam.

Concluſionem igitur oppugnatam ſic demonſtro.

Datur aſſertio, quæ directè ex ſua contradictoria inferatur. Talis in prop. 12. lib. 9. Eucl. eſt hæc: *Numerus E metitur numerum A*, quæ demonſtratione affirmativa infertur ex ſua contradictoria: *E non metitur numerum A*. Quod quidem eſt æquè certum, ac demonſtrationem illam eſſe legitimam? Talis in Elementis hiſce noſtris prop. 4. lib. 11. eſt hæc: *Recta* BQ *non*

eſt perpendicularis plano C AF, quæ affirmativè ducitur ex ſua contradictoria: *Recta BQ eſt perpendicularis plano C AF*. Talis in propoſitione noſtra 35. lib. 5. eſt hæc: *A eſt ad B, ut E ad Z*, quæ directè infertur ex ſua contradictoria: *A non eſt ad B, ut E ad Z*. Tales denique reperiuntur apud Cardanum lib. 5. de proport. p. 201: apud Theodoſium (commentante Clavio) l. 3. ſph. p. 12. & nos plures ſimiles poſſumus exhibere tùm Geometricas, tùm alias.

Ecce tibi coſmographicam unam, quam in iiſdem theſibus diſputandam propoſui. *Maris, omniſque adeò humidi ſuperficies eo ipſo concluditur eſſe ſphærica, quo id negas*. Ponatur vera eſſe ejus contradictoria: *Maris ſuperficies ſphærica non eſt*. Quoniam igitur maris ſuperficies ſphærica non eſt, ergo omnes ſuperficiei maritimæ partes non diſtant æqualiter à centro. Ergo una eſt altior altera (altiorem enim eſſe non aliud eſt, quàm longiùs à centro recedere.) Ergo eæ, quæ altiores ſunt, defluunt verſus minùs altas, ſeu decliviores, hanc enim eſſe humidi naturam experientia conſtat. Ex tali autem defluxu neceſſariò oritur omnium partium ſuperficiei maritimæ æqualis altitudo, ſeu diſtantia à centro. Æqualis verò omnium partium ſuperficiei maritimæ à centro diſtantia infert ſphæricitatem ejus perfectam. *Ergo maris ſuperficies ſphærica eſt*.

Habemus igitur hanc: *Maris ſuperficies ſphærica eſt* directè, & affirmativè deductam ex ſua contradictoria: *Maris ſuperficies ſphærica non eſt*.

Maneat igitur extra omnem controverſiam eſſe, dari aſſertiones, quæ directè ex ſuis contradictoriis inferantur. Atqui aſſertio, quæ ex ſua

contra-

contradictoria directè infertur, neceſſariò vera eſt, (cùm ſit axioma per ſe clariſſimum, id neceſſariò verum eſſe, quod ſuum contradictorium deſtruit: deſtruit autem ſuum contradictorium, quod ex ſuo contradictorio directè ſequitur.) Ergo & aſſertionis contradictoria, ex qua videlicet deducta eſt aſſertio, falſa eſt. Ergo ex falſo directè, & affirmativè deductum eſt verum. Demonſtrata igitur eſt concluſio in theſibus propoſita.

Quòd verò ejuſmodi demonſtratio, qua aſſertio ex ſua contradictoria falſa directè infertur, verè ſcientiam pariat, ſic ut abſque ulteriori ulla deductione ad impoſſibile de aſſertionis veritate ſecuri eſſe debeamus, ex jam dictis manifeſtum eſt, cùm lumine naturæ notiſſimum ſit, id neceſſariò verum eſſe, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt, quod ex ſuo contradictorio ſequela legitima, & neceſſaria infertur. Quòd ſi verum deducatur ex falſo quopiam ſibi non contradictorio, nequaquam talis ratiocinatio ſcientiam pariet, neque enim de veritate aſſertionis ſic deductæ ſecuri eſſe poſſumus, cùm in ea ratio jam allata deficiat, & proprium falſo ſciamus eſſe, ut ex eo falſa deducantur.

His ritè perceptis facilè eruditus Lector perſpiciet, nihil opus eſſe, ut ſingulis Clariſſimi Viri objectionibus, & argumentis refellendis immoremur, quæ vel contra me nihil faciant, vel ex jam dictis ſoluta intelligantur. Quia tamen non omnibus ad manum erit opus clariſſimi Viri, viſum eſt ſingula breviter attingere.

Primùm ſupponit ex Dialectica quædam de conſequentia directa, & directo (ut vocant) de omni, & de nullo. Tum ſententiam exponit ſuam noſtræ oppoſitam. Subjungit deinde: *hanc ſenten-*

tentiam meam ſtabilio everſione omnium illorum, quæ in contrarium afferri poſſe videntur.

Primùm (inquit) *quod ex falſis verum concludere videatur, conſtituit hujuſmodi ſyllogiſmus: Omnis leo eſt lapis. Omnis adamas eſt leo. Ergo omnis adamas eſt lapis. In quo &c.* Tali ſyllogiſmo ad probandam aſſertionem meam ego non utor, in quo videlicet verum deducitur ex falſo non contradictorio, qui proinde etiam, ut oſtendi ſuprà, ſcientiam non parit. Primum iſtud igitur me non tangit.

Secundum genus objectionum (inquit) *conſtituunt hypotheſes Aſtronomicæ &c. Quæ licet fictitiæ tantùm ſint, & falſæ; tamen juxta eas calculum eclyipſibus, & aliis obſervationibus cæleſtibus convenientem Aſtronomi exhibent.* Deinde poſtquam multis contendit, hinc non probari verum ex falſo directè elici, *Progredior* (inquit) *ad tertiam inſtantiam, quam ex regula falſi depromere licet &c.* contenditque rursùm hìc non elici ex falſo verum. Quo quidem in utroque, cùm illi ergo planè aſſentiar, neque ullum inde pro aſſertione mea argumentum petam, non me magis illa tangunt, quàm primum.

Ultimas denique objectiones (inquit) *nobis faceſſunt, modi demonſtrandi ab Euclide 9. Elem. p. 12. Cardano lib. 5. de proport. p. 201. & Theodoſio lib. 1. ſph. p. 12. adhibiti.* quò me digitum intendiſse putat, & verè. Ex his ſiquidem demonſtrandi modis evidenter jam demonſtravi ſuprà, ex falſo elici directè verum, neque affertur quidquam à Clariſſimo Viro, quod demonſtrationem noſtram infirmet. Verbis Clavii ad p. 12. lib. 9. recitatis ſubjungit ex eodem Clavio demonſtratio

tionem p. 12. lib. 1. ſph. Theodoſii: Tum (inquit) *ut verum fatear, neſcio ſanè quid Clavio in mentem venerit, uti & Cardano, quare inſolitum hunc, & mirabilem argumentandi modum eſſe putaverint, qui tamen Logicis valdè familiaris eſt, & duobus principiis omnium evidentiſſimis, & natura notiſſimis nititur, hiſce nempe: quod idem non poſſit ſimul eſſe, & non eſſe; item, quodlibet aut ſit, aut non ſit*. Quid Clavio, Cardano, & cum iſtis, aliiſque etiam mihi, in hac argumentandi forma ſit viſum mirabile, dicere in promptu eſt; hoc nimirùm, quòd aſſertio probanda (G eſt centrum ſphæræ,) directè ex ſua contradictoria (G non eſt centrum ſphæræ) conſequentiis legitimis, ac neceſſariis deducatur. Quod quidem, quotieſcunque evenit, admiratione dignum eſt. Tantum verò abeſt, ut hęc ratio demonſtrandi Logicis valdè familiaris ſit, ut etiam non defuerint doctiſſimi viri, quibus ea impoſſibilis videretur. Ut deinde oſtendat vir Clariſs. hoc diſcurſu, verum ex falſo non deduci, repetit demonſtrationem propoſitionis Theodoſianæ, ſed forma planè diverſa à Claviana illa, quam prius recitaverat, in qua vis argumentationis inter nos controverſæ clariſſimè cernitur. Subjungit denique: *neque ego tàm lynceus ſum, ut exinde videre queam, quo pacto ex falſo verum directè ſequatur. Illud tamen video, quod ſi G demonſtretur non eſſe centrum ſphæræ*, (vult, credo dicere, *ponatur*, cùm demonſtrari nequeat, quod falſum eſt) *neceſſariò ſit admittenda contradictoria ejus affirmativa, quod G ſit centrum ſphæræ*. Ad hæc verba repetam compendio demonſtrationem ſuperiùs datam, qua, opinor, fiet, ut V. C. tametſi, quòd eſt maximè lynceus

ceus

ceus non eſſet, clarè perſpiciat elici directè ex falſo verum.

Quoniam admittit (id, quod etiam eo non dante evinceret Claviana demonſtratio) ſi G ponatur non eſſe centrum, ſequi neceſſitate abſoluta, & formali G eſſe centrum, manifeſtum eſt, G eſſe centrum, directè ſequi ex ſua contradictoria, G non eſt centrum. Ergo ex vi deductionis conſtat, verum eſſe, quod G ſit centrum, cùm lumine naturali notum ſit, id eſſe neceſſariò verum, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt, quod ex ſuo contradictorio directè ſequitur. Habemus igitur, quod ex hac: G non eſt centrum directè deducta ſit hæc vera: G eſt centrum. Atqui hæc: G non eſt centrum, falſa eſt, cùm jam oſtenderim veram eſſe hanc: G eſt centrum. Ergo verum directè deductum eſt ex falſo.

Hæc ſunt, Erudite Lector, quæ ſuper hac quæſtione breviter hìc putavi apponenda. Cæterùm nihil dubito, quin Clariſſimus Lipſtorpius eadem animi æquitate reſponſionem hanc noſtram ſit accepturus, qua dedit oppugnationem ſuam, & ego illam accepi.

FINIS.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE